بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

شروع اللہ کے نام سے جو بڑا مہربان نہایت رحم والا ہے۔

ریاضی 10

سائنس گروپ

علمی کتاب خانہ، لاہور۔

فہرست

الجبرا

جیومیٹری

مؤلفین

- پروفیسر محمد حبیب
- پروفیسر چوہدری اصغر علی
- پروفیسر عبدالرؤف خان
- پروفیسر محمد معین

مدیر

پروفیسر محمد شریف غوری

ماہر مضمون

محمد اختر شیرانی

پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور

اراکین ریویو کمیٹی

۱۔ پروفیسر ڈاکٹر شاہد مبین
۲۔ مسٹر منور دین اعوان
۳۔ مسٹر نسیم الاسلام
۴۔ پروفیسر ایم اسلم خٹک
۵۔ مسز تنزیلہ ناز
۶۔ مسٹر عرفان حسین
۷۔ مسٹر محمد عظیم
۸۔ سید شمن رضا
۹۔ مسٹر فہیم حسین
۱۰۔ مسٹر افضال حسین

کمپوزنگ: مقصود گرافکس، اُردو بازار، لاہور

تیار کردہ: علمی کتاب خانہ
کبیر سٹریٹ، اُردو بازار، لاہور
042-37353510, 37248129

قیمت	تعداد اشاعت	طباعت	ایڈیشن	تاریخ اشاعت
133.00	63,000	اوّل	اوّل	مارچ 2017ء

یونٹ 1

دو درجی مساواتیں
(QUADRATIC EQUATIONS)

In this unit, students will learn how to

- دو درجی مساوات کی تعریف کرنا۔
- ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو بذریعہ تجزی حل کرنا۔
- ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو تکمیل مربع سے حل کرنا۔
- بذریعہ تکمیل مربع، دو درجی فارمولا اخذ کرنا۔
- دو درجی فارمولا سے دو درجی مساوات کو حل کرنا۔
- $ax^4 + bx^2 + c = 0$ قسم کی مساواتوں کو دو درجی مساواتوں میں تبدیل کر کے حل کرنا۔
- $a\,p(x) + \dfrac{b}{p(x)} = c$ قسم کی مساواتوں کو حل کرنا۔
- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ یا $a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$ قسم کی معکوس مساواتوں کو حل کرنا۔
- قوت نمائی مساواتوں جن کے متغیر قوت نماؤں میں ہوں، حل کرنا۔
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k$ قسم کی مساواتوں کو جبکہ $a + b = c + d$ حل کرنا۔
- مندرجہ ذیل جذری مساواتوں کو حل کرنا۔

$$\sqrt{ax + b} = cx + d, \qquad \text{(i)}$$

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b} = \sqrt{x + c}, \qquad \text{(ii)}$$

$$\sqrt{x^2 + px + m} + \sqrt{x^2 + px + n} = q. \qquad \text{(iii)}$$

1.1 دو درجی مساوات (Quadratic Equation):

ایک مساوات جو کہ نامعلوم متغیر مقدار کے مربع پر مشتمل ہو مگر اسکی قوت دو سے زیادہ نہ ہو، دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔

x متغیر میں دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$

جبکہ $a \neq 0$ اور a, b, c حقیقی اعداد ہوں۔ دو درجی مساوات کی عام یا معیاری فارم (شکل) کہلاتی ہے۔

یہاں x^2 کا عددی سر a ہے، x کا عددی سر b ہے اور c مستقل مقدار ہے۔

مساواتیں $x^2 - 7x + 6 = 0$ اور $3x^2 + 4x = 5$ دو درجی مساواتوں کی مثالیں ہیں۔

$x^2 - 7x + 6 = 0$ معیاری فارم میں ہے لیکن $3x^2 + 4x = 5$ معیاری فارم میں نہیں۔

یاد رہے کہ اگر $ax^2 + bx + c = 0$، میں $a = 0$ ہو تو مندرجہ بالا مساوات یک درجی مساوات $bx + c = 0$ بن جاتی ہے۔

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں اگر $b = 0$ ہو تو یہ خالص (پیور) دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر $x^2 - 16 = 0$ اور $4x^2 = 7$ پیور دو درجی مساواتیں ہیں۔

سرگرمی:
کوئی سی دو پیور دو درجی مساواتیں لکھیں۔

1.2 دو درجی مساواتوں کا حل (Solution of Quadratic Equations):

دو درجی مساوات کا حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل طریقے استعمال کیے جاتے ہیں۔

(i) تجزی (ii) مربع مکمل کرنے سے

1.2(i) حل بذریعہ تجزی (Solution by Factorization)

اس طریقہ میں دو درجی مساوات کو معیاری فارم میں لکھتے ہیں جیسے

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(i)}$$

اگر مساوات (i) کے لیے دو اعداد r اور s معلوم کیے جا سکتے ہوں جبکہ $r + s = b$ اور $rs = ac$ ہو تو $ax^2 + bx + c$ کے دو یک درجی فیکٹرز (اجزائے ضربی) معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

طریقہ کار کی وضاحت مثال 1 میں کی گئی ہے۔

مثال 1: دو درجی مساوات $3x^2 - 6x = x + 20$ کو بذریعہ تجزی حل کریں۔

حل:

$$3x^2 - 6x = x + 20 \qquad \text{(i)}$$

مساوات (i) کی معیاری شکل یوں ہے۔

$$3x^2 - 7x - 20 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

یہاں $a = 3$, $b = -7$, $c = -20$ اور $ac = 3 \times -20 = -60$

کیونکہ $-12 + 5 = -7$ اور $-12 \times 5 = -60$

لہٰذا مساوات (ii) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$3x^2 - 12x + 5x - 20 = 0$$

یا $$3x(x-4) + 5(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(3x+5) = 0$$

$$\Rightarrow x - 4 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x + 5 = 0$$

یعنی $$\Rightarrow x = 4 \quad \text{یا} \quad 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$x = -\frac{5}{3}, 4$ دو درجی مساوات (ii) کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\left\{-\frac{5}{3}, 4\right\}$ ہے۔

> **سرگرمی:**
> تجزی کریں۔
> $x^2 - x - 2 = 0$

مثال 2: $5x^2 = 30x$ کو بذریعہ تجزی حل کریں۔

حل:

$$5x^2 = 30x$$

$5x^2 - 30x = 0$ کے اجزائے ضربی یوں ہیں۔

$$5x(x-6) = 0$$

$$\Rightarrow 5x = 0 \quad \text{یا} \quad x - 6 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 6$$

$x = 0, 6$ دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\{0, 6\}$ ہے۔

> یاد رہے کہ $5x^2 = 30x$ سے x کو ختم کرنے سے مراد ایک حل کو ضائع کرنا ہے یعنی $x = 0$

1.2(ii) حل بذریعہ تکمیل مربع (Solution by Completing Square)

دو درجی مساوات بذریعہ تکمیل مربع کے حل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: مساوات $x^2 - 3x - 4 = 0$ کو بذریعہ تکمیل مربع حل کیجیے۔

حل:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad \text{(i)}$$

مستقل مقدار -4 کو دائیں طرف لے جانے سے

$$x^2 - 3x = 4 \qquad \text{(ii)}$$

x کے عددی سر کے $\frac{1}{2}$ کے مربع یعنی $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ کو مساوات (ii) کے طرفین میں جمع کرنے سے

$$x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{16+9}{4}$$

یا $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

اوپر دی گئی مساوات کا دونوں اطراف سے جذر لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

4 اور 1– دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ لہٰذا حل سیٹ $\{-1, 4\}$ ہے۔

مثال 2: مساوات $2x^2 - 5x - 3 = 0$ کو بذریعہ تکمیل مربع حل کیجیے۔

حل:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

ہر رقم کو 2 پر تقسیم کرنے سے

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$-\frac{3}{2}$ کو دائیں طرف لے جانے سے

$$x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{3}{2} \qquad \text{(i)}$$

x کے عددی سر کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دی یعنی $\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

اب $\left(-\frac{5}{4}\right)^2$ کو مساوات (i) کے طرفین میں جمع کرنے سے

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{4}\right)^2$$

یعنی $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} = \frac{24+25}{16}$

یا $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$

اوپر دی گئی مساوات کے طرفین کا جذر لینے سے

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{7}{4}$$

یعنی $x - \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}$ یا $x - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow$ $x = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4}$ یا $x = \frac{7}{4} + \frac{5}{4}$

$= \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ $\quad$ $= \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$3, -\frac{1}{2}$ دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$ ہے۔

مشق 1.1

-1 مندرجہ ذیل مساواتوں کو معیاری فارم میں لکھیے اور پیور دو درجی مساوات کی نشان دہی کیجیے۔

(i). $(x+7)(x-3) = -7$ $\qquad$ (ii) $\frac{x^2+4}{3} - \frac{x}{7} = 1$

(iii) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 6$ $\qquad$ (iv) $\frac{x+4}{x-2} - \frac{x-2}{x} + 4 = 0$

(v) $\frac{x+3}{x+4} - \frac{x-5}{x} = 1$ $\qquad$ (vi) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{25}{12}$

-2 بذریعہ تجزی حل کیجیے۔

(i) $x^2 - x - 20 = 0$ $\qquad$ (ii) $3y^2 = y(y-5)$

(iii) $4 - 32x = 17x^2$ $\qquad$ (iv) $x^2 - 11x = 152$

(v) $\frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{25}{12}$ $\qquad$ (vi) $\frac{2}{x-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}$

-3 مندرجہ ذیل مساواتوں کو تکمیل مربع سے حل کیجیے۔

(i) $7x^2 + 2x - 1 = 0$ $\qquad$ (ii) $ax^2 + 4x - a = 0,\ a \neq 0$

(iii) $11x^2 - 34x + 3 = 0$ $\qquad$ (iv) $lx^2 + mx + n = 0,\ l \neq 0$

(v) $3x^2 + 7x = 0$ $\qquad$ (vi) $x^2 - 2x - 195 = 0$

(vii) $-x^2 + \frac{15}{2} = \frac{7}{2}x$ $\qquad$ (viii) $x^2 + 17x + \frac{33}{4} = 0$

(ix) $4 - \frac{8}{3x+1} = \frac{3x^2+5}{3x+1}$ $\qquad$ (x) $7(x+2a)^2 + 3a^2 = 5a(7x+23a)$

1.3 دودرجی فارمولا (Quadratic Formula)

1.3(i) دودرجی فارمولا کو بذریعہ تکمیل مربع اخذ کرنا:
Derivation of quadratic formula by using completing square method:

دودرجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جبکہ $a \neq 0$

مساوات کی ہر رقم کو a پر تقسیم کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$\frac{c}{a}$ کو دائیں طرف لے جانے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ کو دونوں اطراف میں جمع کرنے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

یا

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

طرفین کا جذر لینے سے

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

یا

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پس $a \neq 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بطور **دودرجی فارمولا** جانا جاتا ہے۔

1.3(ii) دودرجی فارمولا کا استعمال (Use of Quadratic Formula)

دودرجی فارمولا ہر قسم کی مساواتوں کو حل کرنے کے لیے مفید ہے جن کی تجزی ہو سکتی ہو یا نہ ہو سکتی ہو۔ دودرجی فارمولا کی مدد سے دودرجی مساوات کو حل کرنے کی وضاحت مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: دودرجی مساوات $2 + 9x = 5x^2$ کو بذریعہ دودرجی فارمولا حل کریں۔

حل:

$$2 + 9x = 5x^2$$

دی ہوئی مساوات کو معیاری صورت میں یوں لکھا جاتا ہے۔

$$5x^2 - 9x - 2 = 0$$

دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$a = 5,\ b = -9\ ,\ c = -2$$

دودرجی فارمولا $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ میں a, b اور c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(5)(-2)}}{2(5)}$$

یا $x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{10} = \frac{9 \pm 11}{10}$

یعنی $x = \frac{9 - 11}{10}$ یا $x = \frac{9 + 11}{10}$

$x = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$ یا $x = \frac{20}{10} = 2$

سرگرمی: دو درجی مساوات کا فارمولا استعمال کرتے ہوئے $x^2 + x - 2 = 0$ کا حل سیٹ معلوم کریں۔

$-\frac{1}{5}$,2 دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ پس حل سیٹ $\left\{-\frac{1}{5}, 2\right\}$ ہے۔

مثال 2: دو درجی فارمولا کے استعمال سے مساوات $\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+4} = 0$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+4} = 0$$

مختصر کرنے اور معیاری شکل میں لکھنے سے

$$(2x+1)(x+4) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$2x^2 + 8x + x + 4 - (x^2 - 4) = 0$$

$$2x^2 + 9x + 4 - x^2 + 4 = 0$$

یا

$$x^2 + 9x + 8 = 0$$

یہاں $a = 1$, $b = 9$, $c = 8$

فارمولا $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استعمال کرنے سے

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-9 \pm 7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-9+7}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{یا} \quad x = \frac{-9-7}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

-8 ,-1 دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ پس حل سیٹ $\{-8, -1\}$ ہے۔

مشق 1.2

-1 مندرجہ ذیل مساواتوں کو دو درجی فارمولا کے استعمال سے حل کیجیے۔

(i) $2 - x^2 = 7x$ (ii) $5x^2 + 8x + 1 = 0$

(iii) $\sqrt{3}x^2 + x = 4\sqrt{3}$ (iv) $4x^2 - 14 = 3x$

(v) $6x^2 - 3 - 7x = 0$ (vi) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

(vii) $\frac{3}{x-6} - \frac{4}{x-5} = 1$ (viii) $\frac{x+2}{x-1} - \frac{4-x}{2x} = 2\frac{1}{3}$

(ix) $\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2$

(x) $-(l+m) - lx^2 + (2l+m)x = 0, l \neq 0$

1.4 مساواتوں کو دو درجی فارم میں تبدیل کرنا
(Equations reducible to quadratic form)

اب ہم مساواتوں کی مختلف اقسام کے بارے میں بحث کریں گے جنہیں دو درجی مساوات میں مناسب طریقے سے تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

(i) $ax^4 + bx^2 + c = 0$ قسم کی مساواتیں:

مساوات $ax^4 + bx^2 + c = 0$ میں $x^2 = y$ اور $x^4 = y^2$ تبدیل کرنے سے ہمیں y میں دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال 1: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ کو حل کریں۔

حل:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

فرض کیا کہ $x^2 = y$ تو $x^4 = y^2$

مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے۔

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$\Rightarrow \quad y^2 - 9y - 4y + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad y(y-9) - 4(y-9) = 0$

$\Rightarrow \quad (y-9)(y-4) = 0$

$\Rightarrow \quad y - 9 = 0$ یا $y - 4 = 0$ یعنی

$\Rightarrow \quad y = 9$ یا $y = 4$

$y = x^2$ رکھنے سے

$x^2 = 9$ یا $x^2 = 4$

$\Rightarrow \quad x = \pm 3$ یا $x = \pm 2$

اس لیے حل سیٹ $\{\pm 2, \pm 3\}$ ہے۔

(ii) $ap(x)+\frac{b}{p(x)}=c$ قسم کی مساواتیں:

مثال 2: $2(2x-1)+\frac{3}{2x-1}=5$ مساوات کو حل کریں۔

حل:
$$2(2x-1)+\frac{3}{2x-1}=5 \qquad \text{(i)}$$

فرض کیا کہ $2x-1=y$

تب مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے۔

$$2y+\frac{3}{y}=5 \quad \text{یا} \quad 2y^2+3=5y$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-5y+3=0$$

دودرجی فارمولا استعمال کرنے سے

$$y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times3}}{2\times2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{5\pm1}{4}$$

ہم حاصل کرتے ہیں $y=\frac{5+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ یا $y=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$

جب $y=\frac{3}{2}$

$$2x-1=\frac{3}{2} \qquad (\because\ y=2x-1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2} \quad \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

جب $y=1$

$$2x-1=1 \qquad (\because\ y=2x-1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x=1+1=2 \quad \Rightarrow x=1.$$

پس حل سیٹ $\left\{1,\frac{5}{4}\right\}$ ہے۔

(iii) معکوس مساواتیں:

مساوات $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ یا $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$

معکوس مساوات کہلاتی ہے اگر یہ x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے تبدیل نہ ہو۔

$ax^4-bx^3+cx^2-bx+a=0$ میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^4 - b\left(\frac{1}{x}\right)^3 + c\left(\frac{1}{x}\right)^2 - b\left(\frac{1}{x}\right) + a = 0$$

جس کو مختصر کرنے سے ہمیں وہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$a - bx + cx^2 - bx^3 + ax^4 = 0$$

پس $ax^4 - bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ معکوس مساوات ہے۔

معکوس مساوات کو حل کرنے کے طریقہ کی درج ذیل مثال سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 3: مساوات $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 - 5x + 2 = 0$ کو حل کریں۔

حل:

$$2x^4 - 5x^3 - 14x^2 - 5x + 2 = 0$$

ہر رقم کو x^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{2x^4}{x^2} - \frac{5x^3}{x^2} - \frac{14x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 5x - 14 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0 \qquad \text{(i)}$$

فرض کیا کہ $x + \frac{1}{x} = y$ تو $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

پس مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے

$$2(y^2 - 2) - 5y - 14 = 0 \quad \text{یا} \quad 2y^2 - 4 - 5y - 14 = 0$$

$$2y^2 - 5y - 18 = 0$$

$$2y^2 - 9y + 4y - 18 = 0 \quad \text{یا} \quad y(2y - 9) + 2(2y - 9) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2y - 9)(y + 2) = 0$$

$$2y - 9 = 0 \quad \text{یا} \quad y + 2 = 0$$

کیونکہ $y = x + \frac{1}{x}$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 9 = 0 \quad \text{یا} \quad x + \frac{1}{x} + 2 = 0$$

$$2x^2 - 9x + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

دودرجی فارمولا کے استعمال سے

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{81-16}}{4} \qquad \text{یا} \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{65}}{4} \qquad \text{یا} \qquad x = \frac{-2 \pm 0}{2} \Rightarrow x = -1, -1$$

پس حل سیٹ $\left\{-1, \frac{9-\sqrt{65}}{4}, \frac{9+\sqrt{65}}{4}\right\}$ ہے۔

(iv) قوت نمائی مساواتیں:

قوت نمائی مساواتوں میں متغیر قوت نماؤں میں ہوتا ہے۔

اس طرح کی مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے کی وضاحت درجِ ذیل مثال سے کی گئی ہے۔

مثال 4: مساوات $5^{1+x} + 5^{1-x} = 26$ حل کریں

حل: $5^{1+x} + 5^{1-x} = 26$

$$5^1 . 5^x + 5^1 . 5^{-x} = 26 \qquad \text{یا} \qquad 5 . 5^x + \frac{5}{5^x} - 26 = 0 \qquad \text{(i)}$$

فرض کیا کہ $y = 5^x$ تو مساوات (i) اسطرح بن جاتی ہے۔

$$5y + \frac{5}{y} - 26 = 0$$

$$5y^2 + 5 - 26y = 0 \qquad \text{یا} \qquad 5y^2 - 26y + 5 = 0$$

$$5y^2 - 25y - y + 5 = 0$$

$$5y(y-5) - 1(y-5) = 0$$

$$(y-5)(5y-1) = 0$$

یعنی $5y - 1 = 0$, یا $y - 5 = 0$

$y = 5$ یا $5y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$

$y = 5^x$ درج کرنے سے

$5^x = 5^1$ یا $5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = 1$ یا $x = -1$

پس حل سیٹ $\{\pm 1\}$ ہے۔

(v) مساواتوں کی قسم:

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = k$ جبکہ $a + b = c + d$

مثال 5: $(x-1)(x+2)(x+8)(x+5) = 19$ حل کریں۔

حل:

$$(x-1)(x+2)(x+8)(x+5) = 19$$

یا $\quad [(x-1)(x+8)][(x+2)(x+5)] - 19 = 0 \quad (\because\ -1+8 = 2+5)$

$$(x^2+7x-8)(x^2+7x+10) - 19 = 0 \quad \text{(i)}$$

فرض کیا کہ $\quad x^2 + 7x = y$

مساوات (i) اس طرح بن جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}
&(y-8)(y+10) - 19 = 0\\
&y^2 + 2y - 80 - 19 = 0\\
&y^2 + 2y - 99 = 0\\
&y^2 + 11y - 9y - 99 = 0\\
&y(y+11) - 9(y+11) = 0\\
&(y+11)(y-9) = 0
\end{aligned}$$

یعنی $\quad y - 9 = 0 \quad$ یا $\quad y + 11 = 0$

$y = x^2 + 7x$ درج کرنے سے

پس $\quad x^2 + 7x + 11 = 0 \quad$ یا $\quad x^2 + 7x - 9 = 0$

دو درجی فارمولہ کے طریقہ سے حل کرنے سے

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(1)(11)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-44}}{2} = = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

یا

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+36}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{85}}{2}$$

پس حل سیٹ $\left\{\frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-7 \pm \sqrt{85}}{2}\right\}$ ہے۔

مشق 1.3

درجِ ذیل مساواتوں کو حل کیجیے۔

1. $2x^4 - 11x^2 + 5 = 0$
2. $2x^4 = 9x^2 - 4$
3. $5x^{1/2} = 7x^{1/4} - 2$
4. $x^{2/3} + 54 = 15x^{1/3}$
5. $3x^{-2} + 5 = 8x^{-1}$
6. $(2x^2 + 1) + \dfrac{3}{2x^2+1} = 4$
7. $\dfrac{x}{x-3} + 4\left(\dfrac{x-3}{x}\right) = 4$
8. $\dfrac{4x+1}{4x-1} + \dfrac{4x-1}{4x+1} = 2\dfrac{1}{6}$

9. $\frac{x-a}{x+a}-\frac{x+a}{x-a}=\frac{7}{12}$ 10. $x^4-2x^3-2x^2+2x+1=0$

11. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$ 12. $4.2^{2x+1}-9.2^x+1=0$

13. $3^{2x+2}=12.3^x-3$ 14. $2^x+64.2^{-x}-20=0$

15. $(x+1)((x+3)(x-5)(x-7)=192$

16. $(x-1)(x-2)(x-8)(x+5)+360=0$

1.5 ریڈیکل (جذری) مساواتیں:

وہ مساوات جس میں اکیلے جملے یا جملوں پر جذری علامت ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{x-1}=\sqrt{x-2}+1$ اور $\sqrt{x+3}=x+1$

1.5(i) $\sqrt{ax+b}=cx+d$ قسم کی مساوات:

مثال 1: مساوات $\sqrt{3x+7}=2x+3$ کو حل کریں۔

حل:

$$\sqrt{3x+7}=2x+3 \qquad \text{(i)}$$

مساوات (i) کے دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$(\sqrt{3x+7})^2=(2x+3)^2$$

یا

$$3x+7=4x^2+12x+9$$

اوپر دی ہوئی مساوات کو مختصر کرنے سے

$$4x^2+9x+2=0$$

> **نوٹ:** مساوات کا مربع لینے سے یا اس سے کسر کو ختم کرنے سے، فالتو اصل موجود ہو سکتا ہے۔

دو درجی فارمولا استعمال کرنے سے

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{(9)^2-4\times4\times2}}{2\times4}$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{8}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-9\pm7}{8}$$

اس لیے

$$x=\frac{-9+7}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

یا

$$x=\frac{-9-7}{8}=\frac{-16}{8}=-2$$

پڑتال: مساوات (i) میں $x=-\frac{1}{4}$ درج کرنے سے

$$\sqrt{3\left(-\frac{1}{4}\right)+7}=2\left(-\frac{1}{4}\right)+3 \Rightarrow \sqrt{\frac{-3+28}{4}}=-\frac{1}{2}+3 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$ جو کہ درست ہے

مساوات (i) میں $x=-2$ درج کرنے سے

$$\sqrt{3(-2)+7}=2(-2)+3 \Rightarrow \sqrt{1}=-1$$ جو کہ غلط ہے

پڑتال کرنے سے معلوم ہوا کہ $x = -2$ مساوات (i) کو درست ثابت نہیں کرتا۔ اس لیے یہ ایک فالتو حل ہے۔

پس حل سیٹ $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ہے۔

1.5(ii) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$ قسم کی مساوات

مثال 2: مساوات $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = \sqrt{x+11}$ کو حل کریں۔

حل:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = \sqrt{x+11} \qquad \text{(i)}$$

مساوات (i) کے دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$x + 3 + x + 6 + 2\left(\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+6}\right) = x + 11$$

یا

$$2\sqrt{x^2 + 9x + 18} = -x + 2 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کے دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$4(x^2 + 9x + 18) = x^2 - 4x + 4$$

یا

$$3x^2 + 40x + 68 = 0$$

دودرجی فارمولا استعمال کرنے سے

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{(40)^2 - 4 \times 3 \times 68}}{2 \times 3} = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 816}}{6}$$

$$= \frac{-40 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{-40 \pm 28}{6}$$

یعنی

$$x = \frac{-40 - 28}{6} = \frac{-68}{6} = \frac{-34}{3} \qquad \text{یا} \qquad x = \frac{-40 + 28}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

پڑتال: مساوات (i) میں $x = \frac{-34}{3}$ درج کرنے سے

$$\sqrt{\frac{-34}{3} + 3} + \sqrt{\frac{-34}{3} + 6} = \sqrt{\frac{-34}{3} + 11}$$

یا

$$\sqrt{\frac{-34+9}{3}} + \sqrt{\frac{-34+18}{3}} = \sqrt{\frac{-34+33}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{25}{3} \times (-1)} + \sqrt{\frac{16}{3} \times (-1)} = \sqrt{\frac{1}{3} \times (-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{3}}i + \frac{4}{\sqrt{3}}i = \frac{1}{\sqrt{3}}i$$ جو کہ درست نہیں

کیونکہ $\frac{-34}{3}$ ایک فالتو حل ہے۔ لہٰذا حل سیٹ $\{-2\}$ ہے۔

1.5(iii) $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$ قسم کی مساواتیں:

مثال 3: مساوات $\sqrt{x^2-3x+36}-\sqrt{x^2-3x+9}=3$ کو حل کریں۔

حل:
$$\sqrt{x^2-3x+36}-\sqrt{x^2-3x+9}=3$$

فرض کیا کہ $x^2-3x=y$

تب $\sqrt{y+36}-\sqrt{y+9}=3$

دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$y+36+y+9-2\left(\sqrt{y+36}\right)\left(\sqrt{y+9}\right)=9$$
$$2y+45-2\sqrt{(y+36)(y+9)}=9$$
$$-2\sqrt{y^2+45y+324}=-2y-36 \quad \text{یا} \quad -2\sqrt{y^2+45y+324}=-2(y+18)$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{y^2+45y+324}=y+18$$

دوبارہ دونوں اطراف کا مربع لینے سے

$$y^2+45y+324=y^2+36y+324$$
$$9y=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$$

کیونکہ $x^2-3x=y$ ۔ پس $x^2-3x=0$

$$\Rightarrow \quad x(x-3)=0$$

یعنی $x=0$ یا $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$x=0\,,\,3$ مساوات کے حل ہیں۔

پس حل سیٹ $\{0, 3\}$ ہے۔

مشق 1.4

درجِ ذیل مساواتوں کو حل کریں۔

1. $2x+5=\sqrt{7x+16}$
2. $\sqrt{x+3}=3x-1$
3. $4x=\sqrt{13x+14}-3$
4. $\sqrt{3x+100}-x=4$
5. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+21}=\sqrt{x+60}$
6. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+6}$
7. $\sqrt{11-x}-\sqrt{6-x}=\sqrt{27-x}$
8. $\sqrt{4a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$
9. $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}=1$
10. $\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2+3x+2}=3$
11. $\sqrt{x^2+3x+9}+\sqrt{x^2+3x+4}=5$

متفرق مشق 1

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے۔

(a) $bx + c = 0\ ,\ b \neq 0$ (b) $ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a \neq 0$

(c) $ax^2 = bx\ ,\ a \neq 0$ (d) $ax^2 = 0\ ,\ a \neq 0$

(ii) دو درجی معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں رقموں کی تعداد ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) دو درجی مساوات کو حل کرنے کے کتنے طریقے ہیں؟

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iv) دو درجی فارمولا ہے۔

(a) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (b) $x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(c) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ (d) $x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

(v) $x^2 - 15x + 56$ کے دو یک درجی فیکٹرز ہیں۔

(a) $(x + 8)$ اور $(x - 7)$ (b) $(x - 8)$ اور $(x + 7)$

(c) $(x - 8)$ اور $(x - 7)$ (d) $(x + 8)$ اور $(x + 7)$

(vi) وہ مساوات جس میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ درج کرنے سے تبدیل نہ ہو، کہلاتی ہے۔ ایک

(a) قوت نمائی مساوات (b) معکوس مساوات

(c) جذری مساوات (d) کوئی نہیں

(vii) مساوات $3^x + 3^{2-x} + 6 = 0$ کی قسم ہے۔ ایک

(a) قوت نمائی مساوات (b) جذری مساوات

(c) معکوس مساوات (d) کوئی نہیں

(viii) مساوات $4x^2 - 16 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{\pm 4\}$ (b) $\{4\}$

(c) $\{\pm 2\}$ (d) $\{\pm 2\}$

(ix) مساوات $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$ کہلاتی ہے۔ایک

(a) معکوس مساوات (b) جذری مساوات

(c) قوت نمائی مساوات (d) کوئی نہیں

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) حل کریں $x^2 + 2x - 2 = 0$ (ii) بذریعہ تجزی حل کریں $5x^2 = 15x$

(iii) مساوات کی معیاری شکل میں لکھیں $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} = 3$

(iv) دودرجی مساوات کو حل کرنے کے طریقوں کے نام لکھیں۔

(v) حل کریں $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ (vi) حل کریں $\sqrt{3x + 18} = x$

(vii) دودرجی مساوات کی تعریف لکھیں۔ (viii) معکوس مساوات کی تعریف لکھیں۔

(ix) قوت نمائی مساوات کی تعریف لکھیں۔ (x) جذری مساوات کی تعریف لکھیں۔

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) دودرجی مساوات کی معیاری شکل ہے ____________۔

(ii) دودرجی مساوات کو حل کرنے کے کتنے طریقے ہیں ____________۔

(iii) دودرجی فارمولہ معلوم کرنے کے طریقہ کا نام ہے ____________۔

(iv) مساوات $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ کا حل ہے ____________۔

(v) $25x^2 - 1 = 0$ کا حل سیٹ ہے ____________۔

(vi) $2^{2x} - 3.2^x + 5 = 0$ قسم کی مساوات کہلاتی ہے ایک ____________ مساوات۔

(vii) $x^2 - 9 = 0$ مساوات کا حل سیٹ ہے ____________۔

(viii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ قسم کی مساوات کہلاتی ہے ایک ____________ مساوات۔

(ix) مساوات کا وہ حل جو اس مساوات کو صحیح ثابت نہ کرے، ____________ حل کہلاتا ہے۔

(x) ایک مساوات جس میں متغیر والا جملہ ____________ کے نیچے ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

خلاصہ

- ایک مساوات جو کہ نامعلوم مقدار متغیر کے مربع پر مشتمل ہو مگر دو سے زیادہ طاقت نہ رکھے، ایک دودرجی مساوات یا دوسرے درجے کی مساوات کہلاتی ہے۔
- x متغیر (variable) میں دوسرے درجے کی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ جبکہ a, b, c حقیقی اعداد ہوں اور $a \neq 0$۔ عام یا معیاری دودرجی مساوات کہلاتی ہے۔
- ایک مساوات معکوس مساوات کہلاتی ہے اگر یہ تبدیل نہ ہو جب x کو $\frac{1}{x}$ میں تبدیل کیا جائے۔
- قوت نمائی (exponential) مساواتوں میں متغیر قوت نماؤں میں ہوتا ہے۔
- ایک مساوات جس میں جملہ (expression) جذری علامت کے نیچے ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔
- مساوات $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ کے لیے دودرجی فارمولا $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہوتا ہے۔
- دودرجی مساواتوں کو مندرجہ ذیل طریقوں سے حل کیا جاتا ہے

(i) تجزی   (ii) تکمیل مربع

(iii) دودرجی فارمولا

یونٹ 2

دو درجی مساواتوں کا نظریہ
(THEORY OF QUADRATIC EQUATIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- دو درجی جملے $ax^2 + bx + c$ کے فرق کنندہ $b^2 - 4ac$ **(Discriminant)** کی تعریف کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنا۔
- دو درجی مساوات کے فرق کنندہ سے روٹس کی اقسام **(Nature the Roots)** پر بحث کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات کے روٹس کی اقسام معلوم کرنا اور مساوات حل کر کے نتیجہ کی تصدیق کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات میں دی ہوئی نامعلوم مقدار کی قیمت دریافت کرنا جبکہ اس کے روٹس کی اقسام دی ہوئی ہوں۔
- اکائی کا جذر المکعب **(Cube roots of units)** معلوم کرنا۔
- اکائی کے کمپلیکس **(Complex)** جذر المکعب کی پہچان بطور ω اور ω^2 کرنا۔
- اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات **(Properties)** ثابت کرنا۔
- اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات کے استعمال سے مناسب سوالوں کو حل کرنا۔
- دو درجی مساوات کے روٹس **(Roots)** اور عددی سروں **(Co-efficients)** کا تعلق معلوم کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات کو حل کیے بغیر اس کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرنا۔
- دی ہوئی دو درجی مساوات میں نامعلوم مقدار یا مقداروں کی قیمت / قیمتیں معلوم کرنا۔ جبکہ
  - روٹس کا مجموعہ اور روٹس کے حاصل ضرب کا ضعف **(Multiple)** برابر ہوں۔
  - روٹس کے مربعوں کا مجموعہ دیے ہوئے عدد کے برابر ہو
  - روٹس کا فرق دیے ہوئے عدد کے برابر ہو۔
  - روٹس کے دیے ہوئے تعلق **(Relation)** کو ثابت کرنا

    (مثلاً تعلق $2\alpha + 5\beta = 7$، جبکہ α اور β دی ہوئی مساوات کے روٹس ہوں)
  - روٹس کا مجموعہ اور حاصلِ ضرب دونوں کسی دیے ہوئے عدد کے برابر ہوں۔

- دودرجی مساوات کے روٹس کے متشاکل تفاعل یا سمیٹرک تفاعل (*Symmetric function*) کی تعریف کرنا۔
- دودرجی مساوات کے روٹس کے سمیٹرک تفاعل کو اس کے عددی سروں کے لحاظ سے معلوم کرنا۔
- دودرجی مساوات کے دیے ہوئے روٹس سے درجِ ذیل کلیہ بنانا

  $x^2 -$ (روٹس کا مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $= 0$
- اگر α اور β دی ہوئی مساوات کے روٹس ہوں تو درج ذیل قسم کے روٹس کی مساواتیں بنانا
  - $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
  - α^2, β^2
  - $2\alpha+1, 2\beta+1$
  - $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
  - $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
- ترکیبی تقسیم (*Synthetic Division*) کا طریقہ بیان کرنا۔
- ترکیبی تقسیم کے استعمال سے
  - دی ہوئی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کرنے سے باقی (*Remainder*) اور حاصل قسمت (*Quotient*) معلوم کرنا۔
  - اگر کثیر رقمی کے زیروز (*Zeros*) دیے ہوں تو نامعلوم مقدار کی قیمت معلوم کرنا۔
  - اگر کثیر رقمی کے اجزائے ضربی دیے ہوں تو نامعلوم مقدار یا نامعلوم مقداروں کی قیمت معلوم کرنا۔
  - اگر مساوات کا ایک حل دیا ہو تو تین درجی مساوات حل کرنا۔
  - اگر مساوات کے دو حقیقی حل دیے ہوں تو چار درجی مساوات (*Biquadratic equation*) حل کرنا۔
- دو متغیر میں دو ہمزاد مساواتوں (*Simultaneous equations*) کو حل کرنا۔ جبکہ
  - ایک مساوات یک درجی اور دوسری دودرجی ہو۔
  - دونوں مساواتیں دودرجی ہوں۔
- روزمرہ زندگی (*Real life*) کے سوالات (*Problems*) کو دودرجی مساوات بنا کر حل کرنا۔

2.1 دو درجی مساواتوں کے روٹس کی اقسام:

دو درجی مساواتوں کے حل سے ہم مختلف روٹس حاصل کرتے ہیں۔ اب ہم دو درجی مساوات کو بغیر حل کیے اس کے روٹس کی خصوصیات معلوم کریں گے۔

2.1.1 دو درجی جملے $ax^2 + bx + c$ کے فرق کنندہ $(b^2 - 4ac)$ کی خصوصیات:

ہم جانتے ہیں کہ مساوات

$$ax^2 + bx + c = 0 \,,\; a \neq 0 \qquad \text{(i)}$$

کے دو روٹس $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہیں۔

ان روٹس کی اقسام کا انحصار جملہ "$b^2 - 4ac$" کی قیمت پر ہے جو دو درجی مساوات (i) یا دو درجی جملہ $ax^2 + bx + c$ کا فرق کنندہ کہلاتا ہے۔

2.1.2 دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنا

ہم دی ہوئی دو درجی مساوات کا فرق کنندہ معلوم کرنے کے طریقہ کی وضاحت درجِ ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1: درجِ ذیل مساواتوں کا فرق کنندہ معلوم کیجیے۔

(a) $2x^2 - 7x + 1 = 0$ (b) $x^2 - 3x + 3 = 0$

حل:

(a) $2x^2 - 7x + 1 = 0$

یہاں $a = 2,\; b = -7,\; c = 1$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$
$$= (-7)^2 - 4(2)(1)$$
$$= 49 - 8 = 41$$

(b) $x^2 - 3x + 3 = 0$

یہاں $a = 1 \,,\; b = -3 \,,\; c = 3$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$
$$= (-3)^2 - 4(1)(3)$$
$$= 9 - 12 = -3$$

2.1.3 دو درجی مساوات کے روٹس کی اقسام بذریعہ فرق کنندہ

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0 \,,\; (a \neq 0)$ کے روٹس $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہیں اور اس کا فرق کنندہ $b^2 - 4ac$ ہے۔

جبکہ b, a اور c ناطق اعداد ہوں۔ تب روٹس کی اقسام یوں بیان کی جا سکتی ہیں۔

(i) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور مکمل مربع ہو تو اس کے روٹس ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہوتے ہیں۔

(ii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور مکمل مربع نہ ہو۔ تو اس کے روٹس غیر ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہوتے ہیں۔

(iii) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو اس کے روٹس ناطق (حقیقی) اور برابر ہوتے ہیں۔

(iv) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو اس کے روٹس خیالی یا غیر حقیقی (Imaginary) ہوتے ہیں۔

2.1.4 دی ہوئی دو درجی مساوات کے روٹس کی اقسام معلوم کرنا اور مساوات حل کر کے جوابات کی تصدیق کرنا

ہم مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعہ طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 2: مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس کی اقسام بذریعہ فرق کنندہ معلوم کیجیے اور مساواتوں کو حل کر کے جوابات کی تصدیق کیجیے۔

(a) $x^2 - 5x + 5 = 0$ (b) $2x^2 - x + 1 = 0$

(c) $x^2 + 8x + 16 = 0$ (d) $7x^2 + 8x + 1 = 0$

حل: (a) $x^2 - 5x + 5 = 0$

دو درجی معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے سے

یہاں $a = 1, b = -5$ اور $c = 5$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$
$$= (-5)^2 - 4(1)(5) = 25 - 20 = 5 > 0$$

کیونکہ فرق کنندہ مثبت ہے اور مکمل مربع نہیں ہے۔

اس لیے روٹس غیر ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔

اب مساوات کو کلیہ سے حل کرنے سے $x^2 - 5x + 5 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ظاہر ہے کہ روٹس غیر ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔

(b) $2x^2 - x + 1 = 0$

یہاں $a = 2, b = -1$ اور $c = 1$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$
$$= (-1)^2 - 4(2)(1) = 1 - 8 = -7 < 0$$

کیونکہ فرق کنندہ منفی ہے۔
اس لیے روٹس غیر حقیقی اور نابرابر ہیں۔
مساوات کو بذریعہ دو درجی کلیہ حل کرنے سے

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

ظاہر ہے کہ مساوات کے روٹس غیر حقیقی اور نابرابر ہیں۔

(c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

یہاں $a = 1, b = 8$ اور $c = 16$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$$= (8)^2 - 4(1)(16)$$
$$= 64 - 64 = 0$$

کیونکہ فرق کنندہ صفر ہے۔اس لیے روٹس ناطق (حقیقی) اور برابر ہیں۔
مساوات کی تصدیق بذریعہ حل

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$
$$(x+4)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = -4, -4$$

پس روٹس ناطق (حقیقی) اور برابر ہیں۔

(d) $7x^2 + 8x + 1 = 0$

یہاں $a = 7, \ b = 8$ اور $c = 1$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$$= (8)^2 - 4(7)(1)$$
$$= 64 - 28 = 36 = (6)^2$$

جو کہ مثبت اور مکمل مربع ہے۔
اس لیے روٹس ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔
اب مساوات کو بذریعہ تجزی حل کرنے سے

$$7x^2 + 8x + 1 = 0$$
$$7x^2 + 7x + x + 1 = 0$$

$7x(x+1)+1(x+1)=0$
$(x+1)(7x+1)=0$

اس طرح $\quad 7x+1=0 \quad$ یا $\quad x+1=0$

$x=-1 \quad$ یا $\quad 7x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{7}$

پس روٹس ناطق (حقیقی) اور نابرابر ہیں۔

2.1.5 دی ہوئی دو درجی مساوات میں دی ہوئی نامعلوم مقدار کی قیمت دریافت کرنا جب کہ اس کے روٹس کی اقسام دی ہوئی ہوں۔

ہم مندرجہ ذیل مثال سے طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 3: اگر $k \neq 3$ ہو اور مساوات $(k+3)x^2-2(k+1)x-(k+1)=0$ کے روٹس برابر ہوں۔ تو k معلوم کیجیے۔

حل:

$$(k+3)x^2-2(k+1)x-(k+1)=0$$

یہاں $\quad a=k+3,\ b=-2(k+1)$ اور $c=-(k+1)$

کیونکہ روٹس برابر ہیں۔ پس فرق کنندہ کی قیمت صفر ہے۔

یعنی $\quad b^2-4ac=0$

$$[-2(k+1)]^2-4(k+3)[-(k+1)]=0$$

$4[k+1]^2+4(k+3)(k+1)=0$ یا $4(k+1)(k+1+k+3)=0$

$\Rightarrow \quad 4(k+1)(2k+4)=0$ یا $8(k+1)(k+2)=0$

$\Rightarrow \quad k+1=0$ یا $k+2=0$

$\Rightarrow \quad k=-1$ یا $k=-2$

اگر $k=-1,\ -2$ ہو تو روٹس برابر ہوں گے۔

مشق 2.1

1- مندرجہ ذیل دی ہوئی دو درجی مساواتوں کا فرق کنندہ معلوم کیجیے۔

(i) $2x^2+3x-1=0$ $\quad$ (ii) $6x^2-8x+3=0$

(iii) $9x^2-30x+25=0$ $\quad$ (iv) $4x^2-7x-2=0$

2- مندرجہ ذیل دی ہوئی دو درجی مساواتوں کے روٹس کی اقسام معلوم کیجیے اور مساواتوں کو حل کر کے روٹس کی تصدیق کیجیے۔

(i) $x^2-23x+120=0$ $\quad$ (ii) $2x^2+3x+7=0$

(iii) $16x^2-24x+9=0$ $\quad$ (iv) $3x^2+7x-13=0$

-3 k کی کس قیمت کے لیے دیا ہوا جملہ $k^2x^2 + 2(k+1)x + 4$ مکمل مربع ہے؟

-4 اگر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس برابر ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $(2k-1)x^2 + 3kx + 3 = 0$

(ii) $x^2 + 2(k+2)x + (3k+4) = 0$

(iii) $(3k+2)x^2 - 5(k+1)x + (2k+3) = 0$

-5 ثابت کیجیے کہ مساوات $x^2 + (mx+c)^2 = a^2$ کے روٹس برابر ہونگے۔ اگر $c^2 = a^2(1+m^2)$

-6 شرط معلوم کیجیے کہ مساوات $(mx+c)^2 - 4ax = 0$ کے روٹس برابر ہوں۔

-7 اگر مساوات $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + (b^2 - ac) = 0$ کے روٹس برابر ہوں تو $a = 0$ یا $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

-8 ثابت کیجیے کہ مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس ناطق ہیں۔

(i) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$

(ii) $(a+2b)x^2 + 2(a+b+c)x + (a+2c) = 0$

-9 k کی تمام قیمتوں کے لیے مساوات $x^2 - 2\left(k + \frac{1}{k}\right)x + 3 = 0, \quad (k \neq 0)$ کے روٹس حقیقی ہیں۔

-10 ثابت کریں کہ مساوات $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ کے روٹس حقیقی ہیں۔

2.2 اکائی کا جذر المکعب اور اس کی خصوصیات:

2.2.1 اکائی کا جذر المکعب:

فرض کریں کہ x اکائی کا جذر المکعب ہے۔

یعنی $x = (1)^{1/3}$

یا $x^3 = 1$

$\Rightarrow \quad x^3 - 1 = 0$ یا $(x)^3 - (1)^3 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ [$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ کے استعمال سے]

اس طرح $x - 1 = 0$ یا $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$ یا $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

اس لیے اکائی کے تین جذر المکعب ہیں۔

1، $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ اور $\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ جبکہ $i = \sqrt{-1}$

2.2.2 ω اور ω^2 کی بطور اکائی کے کمپلیکس جذر المکعب کی پہچان کرنا۔

اکائی کے دو کمپلیکس جذر المکعب $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہیں۔

اگر ہم کسی ایک کا نام ω (اومیگا) رکھیں تو دوسرا ω^2 ہو گا۔ ہم اس بیان کو اگلے آرٹیکل (Article) میں ثابت کریں گے۔

2.2.3 اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات:

(a) ثابت کیجیے کہ اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی (کمپلیکس) جذر المکعب دوسرے کا مربع ہوتا ہے۔

ثبوت: اکائی کے کمپلیکس جذر المکعب $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{اور} \quad \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1+(-3)+2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-2+2\sqrt{-3}}{4}=\frac{2\left(-1+\sqrt{-3}\right)}{4}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1+(-3)-2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-2-2\sqrt{-3}}{4}=\frac{2\left(-1-\sqrt{-3}\right)}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

پس اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کا مربع ہے۔ یعنی اگر $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ہو تو $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہے۔ اور اگر $\omega=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہو تو $\omega^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ہے۔

(b) ثابت کیجیے کہ اکائی کے تینوں جذر المکعب کا حاصل ضرب ایک ہوتا ہے:

ثبوت: اکائی کے تین جذر المکعب 1، $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہیں۔

اکائی کے جذر المکعب کا حاصل ضرب $=(1)\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

$$=\frac{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2}{4}=\frac{1-(-3)}{4}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

یعنی $\quad \omega^3 = 1 \quad \text{or} \quad (1)(\omega)(\omega^2) = 1 \quad$ یاد رکھیں کہ

$$\boxed{\omega^4 = \omega^3 . \omega = 1 . \omega = \omega}$$

(c) ثابت کیجیے کہ اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کا معکوس ہوتا ہے۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $\quad \omega . \omega^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^3 = 1$

پس $\quad \omega^2 = \dfrac{1}{\omega} \quad$ یا $\quad \omega = \dfrac{1}{\omega^2}$

لہٰذا اکائی کا ہر ایک کمپلیکس جذر المکعب دوسرے کا الٹ ہے۔

(d) ثابت کریں کہ اکائی کے تمام جذر المکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

یعنی $\quad \mathbf{1 + \omega + \omega^2 = 0}$

ثبوت 1: $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$، اور $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ اکائی کے جذر المکعب ہیں۔

اگر $\quad \omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad$ تو $\quad \omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

تمام روٹس کا مجموعہ $= 1 + \omega + \omega^2$

$$= 1 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{2-1+\sqrt{-3}-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

پس $\quad \boxed{1 + \omega + \omega^2 = 0}$

ہم آسانی سے مندرجہ ذیل نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

(i) $\quad 1 + \omega^2 = -\omega \qquad$ (ii) $\quad 1 + \omega = -\omega^2 \qquad$ (iii) $\quad \omega + \omega^2 = -1$

2.2.4 اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات کے استعمال سے مناسب سوالوں کو حل کرنا۔

ہم ω کی بڑی طاقتوں کو 1, ω اور ω^2 میں بدل سکتے ہیں۔

مثلاً

$$\omega^7 = (\omega^3)^2 . \omega = (1)^2 . \omega = \omega$$

$$\omega^{23} = (\omega^3)^7 . \omega^2 = (1)^7 . \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{63} = (\omega^3)^{21} = (1)^{21} = 1$$

$$\omega^{-5} = \frac{1}{\omega^5} = \frac{1}{\omega^3 . \omega^2} = \frac{1}{1 . \omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$$

$$\omega^{-16} = \frac{1}{\omega^{16}} = \frac{1}{(\omega^3)^5 \cdot \omega} = \frac{1}{(1)^5 \cdot \omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

$$\omega^{-27} = \frac{1}{\omega^{27}} = \frac{1}{(\omega^3)^9} = \frac{1}{(1)^9} = 1$$

مثال 1: $(-1+\sqrt{-3})^8 + (-1-\sqrt{-3})^8$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$(-1+\sqrt{-3})^8 + (-1-\sqrt{-3})^8$$

$$= \left[2\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\right]^8 + \left[2\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\right]^8$$

$$= (2\omega)^8 + (2\omega^2)^8$$

$$= 256\,\omega^8 + 256\,\omega^{16}$$

$$= 256\,[\omega^8 + \omega^{16}]$$

$$= 256\,[(\omega^3)^2 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^5 \cdot \omega] \qquad (\because\ \omega^3 = 1)$$

$$= 256\,[\omega^2 + \omega] \qquad (\omega + \omega^2 = -1)$$

$$= 256\,(-1) = -256$$

مثال 2: ثابت کیجیے کہ $x^3 - y^3 = (x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$

حل: $x^3 - y^3 = (x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= (x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y) \\ &= (x-y)[x^2 - \omega^2 xy - \omega xy + \omega^3 y^2] \\ &= (x-y)[x^2 - xy(\omega^2+\omega) + (1)y^2] \\ &= (x-y)[x^2 - xy(-1) + y^2] \\ &= (x-y)[x^2 + xy + y^2] \\ &= x^3 - y^3 = \text{L.H.S} \end{aligned}$$

مشق 2.2

-1 -1، 8، -27، 64 کے جذر المکعب معلوم کیجیے۔

-2 قیمت معلوم کیجیے۔

(i)	$(1-\omega-\omega^2)^7$	(ii)	$(1-3\omega-3\omega^2)^5$
(iii)	$(9+4\omega+4\omega^2)^3$	(iv)	$(2+2\omega-2\omega^2)(3-3\omega+3\omega^2)$
(v)	$(-1+\sqrt{-3})^6 + (-1-\sqrt{-3})^6$	(vi)	$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^9 + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^9$
(vii)	$\omega^{37} + \omega^{38} - 5$	(viii)	$\omega^{-13} + \omega^{-17}$

-3 ثابت کیجیے کہ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$

-4 ثابت کیجیے کہ $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$ ..... $2n$ factors $= 1$

2.3 دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سر:

ہم جانتے ہیں کہ $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس ہیں۔

جبکہ a, b بالترتیب x^2 اور x کے عددی سر ہیں اور c مستقل رقم ہے۔

2.3.1 دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) اور عددی سروں میں تعلق:

اگر $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ تو ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{روٹس کا مجموعہ} = \alpha+\beta$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\text{روٹس کا حاصل ضرب} = \alpha\beta$$

$$=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

اگر ہم روٹس کے مجموعے اور حاصل ضرب کو بالترتیب S اور P سے ظاہر کریں تو

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{x\ \text{کا عددی سر}}{x^2\ \text{کا عددی سر}}$$

اور

$$P=\frac{c}{a}=\frac{\text{مستقل رقم}}{x^2\ \text{کا عددی سر}}$$

2.3.2 دی ہوئی دودرجی مساوات کو حل کیے بغیر اس کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کرنا:

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 1: مساواتوں کو حل کیے بغیر روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(a) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (b) $x^2 + 4x - 9 = 0$

حل: (a) فرض کریں کہ α اور β مساوات $3x^2 - 5x + 7 = 0$ کے روٹس ہیں۔

تب $$\text{روٹس کا مجموعہ} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

اور $$\text{روٹس کا حاصل ضرب} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$$

(b) فرض کریں کہ α اور β مساوات $x^2 + 4x - 9 = 0$ کے روٹس ہیں۔

تب $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$$

اور $$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-9}{1} = -9$$

2.3.3 دی ہوئی دودرجی مساوات میں نامعلوم مقدار کی قیمت معلوم کرنا

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے طریقہ کار کی وضاحت کرتے ہیں۔

(a) جب روٹس کا مجموعہ (Sum of Roots) روٹس کے حاصل ضرب (Product of Roots) کے ضعف (Multiple) کے برابر ہو:

مثال 1: اگر مساوات $3x^2 + (9 - 6h)x + 5h = 0$ کے روٹس کا مجموعہ (Sum of roots) روٹس کے حاصل ضرب (Product of Roots) کے 3 گنا کے برابر ہو تو "h" کی قیمت معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ α اور β مساوات $3x^2 + (9 - 6h)x + 5h = 0$ کے روٹس ہیں۔

تب $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{9 - 6h}{3}\right) = \frac{6h - 9}{3}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5h}{3}$$

کیونکہ $$\alpha + \beta = 3(\alpha\beta)$$

اس لیے $$\frac{6h - 9}{3} = 3\left(\frac{5h}{3}\right) \quad \text{اور} \quad \frac{3(2h - 3)}{3} = 5h$$

$$2h - 3 = 5h \Rightarrow 2h - 5h = 3$$

$$-3h = 3 \Rightarrow h = \frac{3}{-3} = -1$$

(b) جب روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ دیئے ہوئے عدد کے برابر ہو۔

مثال 2: p کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر مساوات $4x^2 + 3px + p^2 = 0$ کے روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے برابر ہو۔

حل: اگر α, β مساوات $4x^2 + 3px + p^2 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3p}{4}$$

اور $$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{p^2}{4}$$

کیونکہ $$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

اس لیے $$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{-3p}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{p^2}{4}\right) = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{9p^2}{16} - \frac{p^2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 9p^2 - 8p^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad p = \pm 4$$

(c) جب روٹس (Roots) کا فرق دیے ہوئے عدد کے برابر ہو:

مثال 3: اگر مساوات $x^2 - hx + 10 = 0$ کے روٹس (Roots) میں 3 کا فرق ہو تو h کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ α اور $\alpha - 3$ مساوات $x^2 - hx + 10 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو

$$\alpha + \alpha - 3 = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-h}{1}\right) = h$$

$$2\alpha - 3 = h \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = h + 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{h+3}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha(\alpha - 3) = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10 \quad \text{اور} \quad \alpha(\alpha - 3) = 10 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے α کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$\left(\frac{h+3}{2}\right)\left(\frac{h+3}{2} - 3\right) = 10 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{h+3}{2}\right)\left(\frac{h+3-6}{2}\right) = 10$$

لہٰذا $$\left(\frac{h+3}{2}\right)\left(\frac{h-3}{2}\right) = 10 \quad \Rightarrow \quad h^2 - 9 = 40,$$

$$h^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad h = \pm 7$$

(d) روٹس (Roots) کے دیے ہوئے ربط کو ثابت کریں:

(مثلاً $2\alpha + 5\beta = 7$، جبکہ α, β دی ہوئی مساوات کے روٹس (Roots) ہیں)

مثال 4: p کی قیمت معلوم کیجیے اگر

α اور β مساوات $x^2 - 5x + p = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں اور دیا ہوا تعلق $2\alpha + 5\beta = 7$ ہے۔

حل: اگر α, β مساوات $x^2 - 5x + p = 0$ کے روٹس ہوں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-5}{1}\right) = 5$$

$$\alpha + \beta = 5 \Rightarrow \beta = 5 - \alpha \qquad \text{(i)}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{p}{1} = p \Rightarrow \alpha\beta = p \qquad \text{(ii)}$$

کیونکہ $2\alpha + 5\beta = 7$ (معلوم) (iii)

مساوات (i) سے β کی قیمت مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$2\alpha + 5(5 - \alpha) = 7$$

لہٰذا $2\alpha + 25 - 5\alpha = 7$ اور $-3\alpha = 7 - 25,$

$$-3\alpha = -18 \Rightarrow \alpha = 6 \qquad \text{(iv)}$$

(i) اور (iv) کے استعمال سے $\beta = 5 - 6 = -1$

α اور β کی قیمتیں مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$6(-1) = p \Rightarrow p = -6$$

(e) جب روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب دونوں کسی دیے ہوئے عدد کے برابر ہوں۔

مثال 5: m کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر مساوات $5x^2 + (7 - 2m)x + 3 = 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب دیے ہوئے عدد λ کے برابر ہو۔

حل: فرض کریں α, β مساوات $5x^2 + (7 - 2m)x + 3 = 0$ کے روٹس ہوں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{7 - 2m}{5} = \frac{2m - 7}{5}$$

اور $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

فرض کریں کہ $\alpha + \beta = \lambda$ (i)

اور $\alpha\beta = \lambda$ (ii)

(i) اور (ii) کی رو سے $\alpha + \beta = \alpha\beta$

اس لیے $\frac{2m - 7}{5} = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow 2m - 7 = 3 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

مشق 2.3

-1 مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کو حل کیے بغیر مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $x^2 - 5x + 3 = 0$ (ii) $3x^2 + 7x - 11 = 0$

(iii) $px^2 - qx + r = 0$ (iv) $(a + b)\,x^2 - ax + b = 0$

(v) $(l + m)\,x^2 + (m + n)\,x + n - l = 0$ (vi) $7x^2 - 5mx + 9n = 0$

-2 k کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $2kx^2 - 3x + 4k = 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اس کے روٹس (Roots) کے حاصل ضرب کا دو گنا ہو۔

(ii) مساوات $x^2 + (3k - 7)\,x + 5k = 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اس کے روٹس (Roots) کے حاصل ضرب کا $\frac{3}{2}$ گنا ہو۔

-3 k کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $4kx^2 + 3kx - 8 = 0$ کے روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ 2 ہو۔

(ii) مساوات $x^2 - 2kx + (2k + 1) = 0$ کے روٹس (Roots) کے مربعوں کا مجموعہ 6 ہو۔

-4 p کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $x^2 - x + p^2 = 0$ کے روٹس (Roots) میں 1 کا فرق ہو۔

(ii) مساوات $x^2 + 3x + p - 2 = 0$ کے روٹس (Roots) میں 2 کا فرق ہو۔

-5 m کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) مساوات $x^2 - 7x + 3m - 5 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $3\alpha + 2\beta = 4$ کو ثابت کریں۔

(ii) مساوات $x^2 + 7x + 3m - 5 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $3\alpha - 2\beta = 4$ کو ثابت کریں۔

(iii) مساوات $3x^2 - 2x + 7m + 2 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $7\alpha - 3\beta = 18$ کو ثابت کریں۔

-6 m کی قیمت معلوم کیجیے۔

اگر مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب دونوں ایک دیے گئے عدد λ کے برابر ہوں۔

(i) $(2m + 3)x^2 + (7m - 5)x + (3m - 10) = 0$

(ii) $4x^2 - (3 + 5m)x - (9m - 17) = 0$

2.4 دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) کے (سیمٹرک) تفاعل: (Symmetric Functions)

2.4.1 دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) کے سیمٹرک تفاعل کی تعریف:

تعریف:

دو درجی مساوات کے روٹس کے سیمٹرک تفاعل ایسے جملوں پر مشتمل ہوتا ہے جن (جملے) میں روٹس کی جگہ تبدیل کرنے سے تفاعل میں فرق نہیں آتا۔

$$f(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$$

تو $\quad (\because\ \beta^2 + \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2)$

$$f(\beta, \alpha) = \beta^2 + \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2$$
$$= f(\alpha, \beta)$$

مثال: اگر $\alpha = 2,\ \beta = 1$ ہو تو $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر $\alpha = 1$ اور $\beta = 2$ ہو تو $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta$ کی قیمت بھی معلوم کیجیے۔

حل: جب $\alpha = 2$ اور $\beta = 1$

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = (2)^3 + (1)^3 + 3(2)(1)$$
$$= 8 + 1 + 6 = 15$$

جب $\quad \alpha = 1$ اور $\beta = 2$

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = (1)^3 + (2)^3 + 3(1)(2)$$
$$= 1 + 8 + 6 = 15$$

جملہ $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta$، α اور β کے سیمٹرک تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

2.4.2 دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) کے سیمٹرک تفاعل کی اس کے عددی سروں کی شکل میں قیمت معلوم کرنا:

اگر α, β دو درجی مساوات

$$ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0) \qquad \text{(i)}$$

کے روٹس ہوں تو

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \qquad \text{(ii)}$$

اور

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (ii) اور (iii) میں دیے گئے تفاعل دو درجی مساوات (i) کے سیمٹرک تفاعل ہیں۔

دو متغیروں α, β میں کچھ مزید سیمٹرک تفاعل نیچے دیے گئے ہیں۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ $\qquad$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ $\qquad$ (iv) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

مثال 1: اگر α, β دو درجی مساوات $px^2 + qx + r = 0 \,, \; (p \neq 0)$ کے روٹس (Roots) ہوں تو $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ α, β مساوات $px^2 + qx + r = 0$ کے روٹس (Roots) ہیں۔ اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{q}{p} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = \frac{r}{p}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{r}{p}\left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{-qr}{p^2}$$

مثال 2: اگر α, β مساوات $2x^2 + 3x + 4 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

حل: کیونکہ α, β مساوات $2x^2 + 3x + 4 = 0$ کے روٹس ہیں۔ اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = \frac{4}{2} = 2$$

(i) $$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2\,(2)$$

$$= \frac{9}{4} - 4 = \frac{9 - 16}{4} = -\frac{7}{4}$$

(ii) $$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = (\alpha + \beta)\,\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4}$$

مشق 2.4

-1 اگر α, β مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ (iii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

-2 اگر α, β مساوات $4x^2 - 5x + 6 = 0$ کے ہوں روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta^2$

(iii) $\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^2}$ (iv) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

-3 اگر α, β مساوات $lx^2 + mx + n = 0 \;\; (l \neq 0)$ کے روٹس (Roots) ہوں تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3$ (ii) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

2.5 دودرجی مساوات کی تشکیل:

اگر α اور β مطلوبہ دودرجی مساوات کے روٹس(Roots)ہوں۔

فرض کریں کہ $x = \beta$ اور $x = \alpha$

یعنی $x - \beta = 0$, $x - \alpha = 0$

اور $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

جو کہ مطلوبہ دودرجی مساوات کی معیاری شکل ہے۔

2.5.1 دیئے گئے روٹس(Roots)سے دودرجی مساوات کا کلیہ تشکیل دینا:

$x^2 -$ (روٹس کا مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $= 0$:

فرض کریں کہ α, β درج ذیل دودرجی مساوات کے روٹس ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0) \qquad \text{(i)}$$

تب $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

مساوات (i) کو اس طرح لکھنے سے $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

یا $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

یا $x^2 -$ (روٹس کا مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $= 0$,

$x^2 - Sx + P = 0$ جبکہ $S = \alpha + \beta$ اور $P = \alpha\beta$

مثال 1: دودرجی مساوات بنائیے۔ جس کے روٹس (Roots) 3 اور 4 ہوں۔

حل: کیونکہ 3 اور 4 مطلوبہ دودرجی مساوات کے روٹس(Roots) ہیں۔

اس لیے $S =$ روٹس کا مجموعہ $= 3 + 4 = 7$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (3)(4) = 12$

کیونکہ $x^2 - Sx + P = 0,$

پس $x^2 - 7x + 12 = 0$ مطلوبہ دودرجی مساوات ہے۔

2.5.2 دو درجی مساوات کی تشکیل جس کے روٹس (Roots) درج ذیل اقسام کے ہوں:

(i) $2\alpha+1\,,\,2\beta+1$ (ii) $\alpha^2\,,\,\beta^2$ (iii) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ (iv) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta\,,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

جبکہ α, β دی ہوئی دو درجی مساوات کے روٹس ہوں۔

مثال 2: اگر α, β مساوات $2x^2-3x-5=0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو دیے ہوئے روٹس سے مساوات بنائیے۔

(i) $2\alpha+1\,,\,2\beta+1$ (ii) $\alpha^2\,,\,\beta^2$ (iii) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta\,,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

حل: چونکہ α, β مساوات $2x^2-3x-5=0$ کے روٹس ہیں۔

اس لیے $\alpha+\beta=-\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ اور $\alpha\beta=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$

(i) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= 2\alpha+1+2\beta+1$

$$= 2(\alpha+\beta)+2 = 2\left(\frac{3}{2}\right)+2 = 5$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (2\alpha+1)(2\beta+1)$

$$= 4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$$
$$= 4\left(-\frac{5}{2}\right)+2\left(\frac{3}{2}\right)+1$$
$$= -10+3+1 = -6$$

اب $x^2-Sx+P=0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2-(5)x+(-6)=0 \Rightarrow x^2-5x-6=0$

(ii) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}+5 = \frac{29}{4}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= \alpha^2\,.\,\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

اب $x^2-Sx+P=0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2-\frac{29}{4}x+\frac{25}{4}=0 \Rightarrow 4x^2-29x+25=0$

(iii) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = (\alpha+\beta) \cdot \dfrac{1}{\alpha\beta}$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) \qquad (\because \ \alpha\beta = -\frac{5}{2})$$

$$= -\frac{3}{5}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha\beta} = -\dfrac{2}{5} \qquad (\because \ \alpha\beta = -\dfrac{5}{2})$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)x + \left(-\dfrac{2}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \ 5x^2 + 3x - 2 = 0$

(iv) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta] \cdot \dfrac{1}{\alpha\beta}$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{2}\right)\right] \times \left(-\frac{2}{5}\right) \qquad (\because \ \alpha\beta = -\frac{5}{2})$$

$$= \left(\frac{9}{4} + 5\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{29}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{29}{10}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha} = 1$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $x^2 - \left(-\dfrac{29}{10}\right)x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \ 10x^2 + 29x + 10 = 0$

(v) $S =$ روٹس کا مجموعہ $= \alpha + \beta + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \alpha + \beta + \dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$

$$= (\alpha+\beta)\left(1 + \frac{1}{\alpha\beta}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{9}{10}$$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (\alpha+\beta) \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right) = (\alpha+\beta)\left(\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}\right)$

$$= (\alpha+\beta)^2 \times \frac{1}{\alpha\beta} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{9}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{9}{10}$$

اب $x^2 - Sx + P = 0$

P اور S کو استعمال کرنے سے $\quad x^2 - \frac{9}{10}x + \left(-\frac{9}{10}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 - 9x - 9 = 0$

مثال 3: اگر α, β مساوات $x^2 - 7x + 9 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ایسی مساوات تشکیل دیں جس کے روٹس 2α اور 2β ہوں۔

حل: کیونکہ α, β مساوات $x^2 - 7x + 9 = 0$ کے روٹس ہیں۔ اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-7}{1}\right) = 7$$

اور

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

2α اور 2β مطلوبہ مساوات کے روٹس (Roots) ہیں۔

$S =$ روٹس کا مجموعہ $= 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2(7) = 14$

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta = 4(9) = 36$

پس مطلوبہ دو درجی مساوات درجِ ذیل ہو گی۔

$$x^2 - Sx + P = 0$$

یعنی

$$x^2 - 14x + 36 = 0$$

مشق 2.5

1- مندرجہ ذیل روٹس (Roots) والی دو درجی مساواتیں لکھیں۔

(a) $1, 5$ (b) $4, 9$ (c) $-2, 3$

(d) $0, -3$ (e) $2, -6$ (f) $-1, -7$

(g) $1 + i, 1 - i$ (h) $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$

2- اگر α, β مساوات $x^2 - 3x + 6 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو دیے ہوئے روٹس (Roots) سے مساواتیں بنائیں۔

(a) $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ (b) α^2, β^2 (c) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (e) $\alpha + \beta, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

3- اگر α, β مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو دیے ہوئے روٹس (Roots) سے مساواتیں بنائیں۔

(a) α^2, β^2 (b) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

2.6 ترکیبی تقسیم (Synthetic Division)

ترکیبی تقسیم کے عمل سے ہم کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کر کے حاصل قسمت اور باقی معلوم کرتے ہیں۔ درحقیقت ترکیبی تقسیم، تقسیم کا ایک مختصر طریقہ ہے۔

2.6.1 ترکیبی تقسیم کا طریقہ کار:

درج ذیل مثال میں ترکیبی تقسیم کے طریقہ کار کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے کثیر رقمی $P(x) = 5x^4 + x^3 - 3x$ کو $x - 2$ پر تقسیم کیجیے۔

حل:

$$(5x^4 + x^3 - 3x) \div (x - 2)$$

یہاں تقسیم کنندہ $x - a$ میں $a = 2$

اب مقسوم علیہ کے عددی سروں کو دیے ہوئے طریقہ سے نیچے ترکیب نزولی میں اور غیر موجود x کے عددی سر کو صفر لکھیں۔

$$P(x) = 5x^4 + 1 \times x^3 + 0 \times x^2 - 3x + 0 \times x^0$$

اب مقسوم علیہ سے x کے عددی سروں کو ایک قطار میں اور $a = 2$ کو بائیں طرف لکھیں۔

	5	1	0	−3	0
2	↓	10	22	44	82
	5	11	22	41	82

(i) پہلے عددی سر 5 کو قطار میں افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(ii) 5 کو 2 سے ضرب دیں اور جواب 10 کو 1 کے نیچے لکھیں۔ مجموعہ $10 + 1 = 11$ کو افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(iii) 11 کو 2 سے ضرب دے کر جواب 22 کو 0 کے نیچے لکھیں۔ 0 اور 22 کو جمع کر کے جواب 22 افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(iv) 22 کو 2 سے ضرب دے کر جواب 44 کو -3 کے نیچے لکھیں۔ 44 اور -3 کے مجموعے 41 کو افقی قطعہ خط کے نیچے لکھیں۔

(v) 41 کو 2 سے ضرب دیں اور جواب 82 کو 0 کے نیچے لکھیں۔ 82 اور 0 کا مجموعہ 82 ہے۔

آخری قطار میں باقی 82 کو راسی قطعہ خط سے الگ کیا گیا ہے اور 5, 11, 22, 41 حاصل قسمت کے عددی سر ہیں۔

جیسا کہ مقسوم علیہ میں x کی سب سے بڑی قوت 4 ہے۔ اس لیے حاصل قسمت میں x کی سب سے بڑی قوت $4 - 1 = 3$ ہو گی۔

پس $\quad$ حاصل قسمت $= Q(x) = 5x^3 + 11x^2 + 22x + 41$

اور $\quad$ باقی $= R = 82$

2.6.2 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے:

(a) دی ہوئی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی (Linear polynomial) سے تقسیم کر کے حاصل قسمت (Quotient) اور باقی (Remainder) معلوم کرنا:

مثال 2: ترکیبی تقسیم کے استعمال سے $P(x) = x^4 - x^2 + 15$ کو $x + 1$ سے تقسیم کیجیے۔

حل: $(x^4 - x^2 + 15) \div (x + 1)$

کیونکہ $x + 1 = x - (-1)$ پس $a = -1$

اب مقسوم علیہ کے عددی سروں کو ایک قطار میں اور $a = -1$ کو بائیں طرف لکھیں۔

	1	0	−1	0	15
−1	↓	−1	1	0	0
	1	−1	0	0	15

اس لیے $Q(x) = x^3 - x^2 + 0.\,x + 0 = x^3 - x^2$ = حاصل قسمت

اور 15 = باقی

(b) اگر کثیر رقمی کے زیروز دیئے ہوں تو متغیر/متغیروں کی قیمت/قیمتیں معلوم کرنا۔

مثال 3: اگر '1'، کثیر رقمی $P(x) = 3x^2 + 4x - 7h$ کا زیرو ہو تو ترکیبی تقسیم کے استعمال سے h کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $P(x) = 3x^2 + 4x - 7h$

اور '1'، کثیر رقمی کا زیرو ہو تو ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے

	3	4	$-7h$
1	↓	3	7
	3	7	$7 - 7h$

$7 - 7h$ = باقی

کیونکہ '1'، کثیر رقمی کا زیرو ہے۔

اس لیے 0 = باقی

یعنی $7 - 7h = 0$

$7 = 7h \Rightarrow h = 1$

(c) اگر کثیر رقمی کے اجزائے ضربی دیئے ہوں تو متغیر/متغیروں کی قیمت/قیمتیں معلوم کرنا۔

مثال 4: اگر $x - 1$ اور $x + 1$، کثیر رقمی $P(x) = x^3 + 3lx^2 + mx - 1$ کے اجزائے ضربی ہوں تو ترکیبی تقسیم کے استعمال سے l اور m کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $x - 1$ اور $x + 1$، کثیر رقمی $P(x) = x^3 + 3lx^2 + mx - 1$ کے اجزائے ضربی ہیں۔ اس لیے "1" اور

"-1" کثیر رقمی $P(x)$ کے زیروز ہیں۔

اب ترکیبی تقسیم سے

1	1	$3l$	m	-1
	↓	1	$3l+1$	$3l+m+1$
	1	$3l+1$	$3l+m+1$	$3l+m$

کیونکہ '1'، کثیر رقمی کا صفر ہے۔اس لیے باقی صفر ہے۔یعنی

$$3l+m=0 \qquad \text{(i)}$$

اور

-1	1	$3l$	m	-1
	↓	-1	$-3l+1$	$3l-m-1$
	1	$3l-1$	$-3l+m+1$	$3l-m-2$

کیونکہ '-1'، کثیر رقمی کا زیرو ہے اس لیے باقی صفر ہے۔

یعنی

$$3l-m-2=0 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$6l-2=0$$

$$6l=2 \quad \Rightarrow \quad l=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

l کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$3\left(\frac{1}{3}\right)+m=0 \quad \text{or} \quad 1+m=0 \quad \Rightarrow \quad m=-1$$

پس

$l=\frac{1}{3}$ اور $m=-1$

(d) اگر مساوات کا ایک روٹ دیا ہوا ہو تو تین درجی مساوات حل کرنا۔

مثال 5: ترکیبی تقسیم کے استعمال سے مساوات $3x^3-11x^2+5x+3=0$ کو حل کیجیے جب 3 مساوات کا روٹس ہے۔

حل: کیونکہ 3 مساوات $3x^3-11x^2+5x+3=0$ کا روٹ ہے۔

تب ترکیبی تقسیم سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

3	3	-11	5	3
	↓	9	-6	-3
	3	-2	-1	0

اس لیے کم درجے والی مساوات

$$3x^2-2x-1=0$$

$$3x^2 - 3x + x - 1 = 0$$
$$3x(x-1) + 1(x-1) = 0$$
$$(x-1)(3x+1) = 0$$

$x - 1 = 0$ یا $3x + 1 = 0$,

یعنی $x = 1$ یا $3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

پس 3 ,1 اور $-\frac{1}{3}$ دی ہوئی مساوات کے روٹس ہیں۔

(e) اگر مساوات کے دو حقیقی روٹس (Roots) دیے گئے ہوں تو چار درجی مساوات حل کرنا:

مثال 6: ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے مساوات $x^4 - 49x^2 + 36x + 252 = 0$ کو حل کریں جب 2– اور 6 اس کے روٹس (Roots) ہوں۔

حل: کیونکہ 2– اور 6 دی ہوئی مساوات $x^4 - 49x^2 + 36x + 252 = 0$ کے روٹس ہیں۔

ترکیبی تقسیم سے

	1	0	−49	36	252
−2	↓	−2	4	90	−252
	1	−2	−45	126	0
6		6	24	−126	
	1	4	−21	0	

اس لیے کم درجے والی مساوات

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$
$$x^2 + 7x - 3x - 21 = 0$$
$$x(x+7) - 3(x+7) = 0$$
$$(x+7)(x-3) = 0$$

$x + 7 = 0$ یا $x - 3 = 0$

$x = -7$ یا $x = 3$

پس $-2, 6, -7$ اور 3 دی ہوئی مساوات کے روٹس (Roots) ہیں۔

مشق 2.6

-1 ترکیبی تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے حاصل قسمت اور باقی معلوم کیجیے۔ جب

(i) $(x^2 + 7x - 1) \div (x + 1)$ (ii) $(4x^3 - 5x + 15) \div (x + 3)$

(iii) $(x^3 + x^2 - 3x + 2) \div (x - 2)$

-2 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے h کی قیمت معلوم کیجیے اگر

(i) عدد '3' کثیر رقمی $2x^3 - 3hx^2 + 9$ کا زیرو ہو۔

(ii) عدد '1' کثیر رقمی $x^3 - 2hx^2 + 11$ کا زیرو ہو۔

(iii) '1−' کثیر رقمی $2x^3 + 5hx - 23$ کا زیرو ہو۔

-3 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے l اور m کی قیمتیں معلوم کیجیے اگر

(i) $(x + 3)$ اور $(x - 2)$ کثیر رقمی $x^3 + 4x^2 + 2lx + m$ کے اجزائے ضربی ہوں۔

(ii) $(x - 1)$ اور $(x + 1)$ کثیر رقمی $x^3 - 3lx^2 + 2mx + 6$ کے اجزائے ضربی ہوں۔

-4 بذریعہ ترکیبی تقسیم حل کیجیے اگر

(i) عدد '2' مساوات $x^3 - 28x + 48 = 0$ کا روٹ ہو۔

(ii) عدد '3' مساوات $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ کا روٹ ہو۔

(iii) عدد '1−' مساوات $4x^3 - x^2 - 11x - 6 = 0$ کا روٹ ہو۔

-5 بذریعہ ترکیبی تقسیم حل کیجیے اگر

(i) '1' اور '3' مساوات $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں۔

(ii) '3' اور '4−' مساوات $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں۔

2.7 ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Equations)

دو متغیروں میں دو مساواتیں جس کا حل سیٹ مشترک ہو وہ **ہمزاد مساواتیں** کہلاتی ہیں۔

تمام مترتب جوڑوں (x, y) کا وہ سیٹ جو ہمزاد مساواتوں کو درست ثابت کرے ان کا حل سیٹ کہلاتا ہے۔

2.7(i) دو متغیر والی دو مساواتوں کو حل کرنا:

(a) جب ایک مساوات یک درجی اور دوسری دو درجی ہو:

ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے کے لیے ہم یک درجی مساوات میں y کی قیمت کو x کی فارم میں تبدیل کر کے دو درجی مساوات میں رکھنے سے x میں دو درجی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ x والی دو درجی مساوات کو حل کرنے سے x کی دو قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔ x کی ہر قیمت سے y کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ اس طرح وہ مترتب جوڑے (x, y) ہمزاد مساواتوں کا حل سیٹ ہوتے ہیں۔

مثال 1: ہمزاد مساواتوں $3x^2 + y^2 = 52$ اور $3x + y = 4$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں

$3x + y = 4$ (i)

اور $3x^2 + y^2 = 52$ (ii)

مساوات (i) سے

$y = 4 - 3x$ (iii)

مترتب جوڑے (x, y) میں، x ہمیشہ پہلے اور y ہمیشہ بعد میں آتا ہے۔

y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$3x^2 + (4 - 3x)^2 = 52$$
$$3x^2 + 16 - 24x + 9x^2 - 52 = 0$$
$$12x^2 - 24x - 36 = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

تجزی کرنے سے

$$x^2 - 3x + x - 3 = 0$$
$$x(x - 3) + 1(x - 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x - 3)(x + 1) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = -1$$

x کی قیمتیں مساوات (iii) میں درج کرنے سے

جب $x = -1$ تو $y = 4 - 3x$

$y = 4 - 3(-1) = 4 + 3$

$y = 7$

جب $x = 3$ تو $y = 4 - 3x$

$y = 4 - 3(3) = 4 - 9$

$y = -5$

اس لیے مترتب جوڑے $(3, -5)$ اور $(-1, 7)$ بنتے ہیں۔

پس حل سیٹ $\{(3, -5), (-1, 7)\}$ ہے۔

(b) جب دونوں مساواتیں دو درجی ہوں:

مساواتوں کو حل کرنے کا طریقہ مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 2: مساواتوں $x^2 + y^2 + 2x = 8$ اور $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$x^2 + y^2 + 2x = 8$ (i)

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$ (ii)

مساوات (ii) سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 8$$

یا $$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 6 \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (iii) کو مساوات (ii) سے تفریق کرنے سے

$$4x - 2y = 2 \quad \text{یا} \quad 2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1 \qquad \text{(iv)}$$

مساوات (ii) میں y کی قیمت درج کرنے سے

$$(x-1)^2 + (2x - 1 + 1)^2 = 8$$
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 8 = 0$$
$$5x^2 - 2x - 7 = 0$$
$$5x^2 - 7x + 5x - 7 = 0 \quad \text{یا} \quad x(5x-7) + 1\,(5x-7) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (5x-7)(x+1) = 0$$
$$5x - 7 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$

یعنی $$5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5} \quad \text{یا} \quad x = -1$$

x کی قیمتیں مساوات (iv) میں درج کرنے سے

جب $x = -1$

تو $y = 2(-1) - 1$

$y = -3$

جب $x = \frac{7}{5}$

تو $y = 2\left(\frac{7}{5}\right) - 1$

$$y = \frac{14}{5} - 1 = \frac{14-5}{5} = \frac{9}{5}$$

پس حل سیٹ $\left\{(-1, -3), \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)\right\}$ ہے۔

مثال 3: مساواتوں $x^2 + y^2 = 7$ اور $2x^2 + 3y^2 = 18$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 7 \qquad \text{(i)}$$
$$2x^2 + 3y^2 = 18 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) کو 3 سے ضرب دینے سے

$$3x^2 + 3y^2 = 21 \qquad \text{(iii)}$$

مساواتوں (ii) کو (iii) سے تفریق کرنے سے

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

جب $x = \sqrt{3}$ ہو تو مساوات (i) سے

$x^2 + y^2 = 7$ یا $3 + y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

جب $x = -\sqrt{3}$ تو $y = \pm 2$

پس مطلوبہ حل سیٹ $\{(\pm\sqrt{3}, \pm 2)\}$ ہے۔

مثال 4: مساواتوں $x^2 + y^2 = 20$ اور $6x^2 + xy - y^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 20 \qquad \text{(i)}$$
$$6x^2 + xy - y^2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) کو یوں لکھنے سے

$$y^2 - xy - 6x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-(-x) \pm \sqrt{(-x)^2 - 4 \times 1 \times (-6x^2)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 24x^2}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{25x^2}}{2} = \frac{x \pm 5x}{2}$$

$$y = \frac{x + 5x}{2} = \frac{6x}{2} = 3x \quad \text{یا} \quad y = \frac{x - 5x}{2} = \frac{-4x}{2} = -2x$$

مساوات (i) میں $y = 3x$ درج کرنے سے

$$x^2 + (3x)^2 = 20 \quad \text{یا} \quad x^2 + 9x^2 = 20$$

$$\Rightarrow \quad 10x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

جب $x = \sqrt{2}$ ہو تو $y = 3(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$ اور جب $x = -\sqrt{2}$ ہو تو $y = 3(-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$

مساوات (i) میں $y = -2x$ درج کرنے سے

$$x^2 + (-2x)^2 = 20 \quad \text{یا} \quad x^2 + 4x^2 = 20$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

جب $x = 2$ ہو تو $y = -2(2) = -4$ اور جب $x = -2$ ہو تو $y = -2(-2) = 4$

پس حل سیٹ $\{(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -3\sqrt{2}), (2, -4), (-2, 4)\}$ ہے۔

مثال 5: مساواتوں $x^2 + y^2 = 40$ اور $3x^2 - 2xy - y^2 = 80$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساواتیں یہ ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 40 \qquad \text{(i)}$$
$$3x^2 - 2xy - y^2 = 80 \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (i) کو 2 سے ضرب دینے سے

$$2x^2 + 2y^2 = 80 \qquad \text{(iii)}$$

مساوات (iii) کو مساوات (ii) سے تفریق کرنے سے

$$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

مساوات (iv) کی تجزی کرنے سے

$$x^2 - 3xy + xy - 3y^2 = 0$$

یا $\quad x(x - 3y) + y(x - 3y) = 0$

$$\Rightarrow \quad (x - 3y)(x + y) = 0$$

$x - 3y = 0$ یا $x + y = 0$

$x = 3y$ یا $x = -y$

مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$(3y)^2 + y^2 = 40 \qquad\qquad (-y)^2 + y^2 = 40$$

$$10y^2 = 40 \qquad\qquad 2y^2 = 40$$

$$y^2 = 4 \qquad\qquad y^2 = 20$$

$$y = \pm 2 \qquad\qquad y = \pm 2\sqrt{5}$$

$y = 2$, $x = 3y$, $x = 3(2)$, $x = 6$

$y = -2$, $x = 3y$, $x = 3(-2)$, $x = -6$

$y = 2\sqrt{5}$, $x = -y$, $x = -(2\sqrt{5})$, $x = -2\sqrt{5}$

$y = -2\sqrt{5}$, $x = -y$, $x = -(-2\sqrt{5})$, $= 2\sqrt{5}$

اس لیے حل سیٹ $\{(6, 2), (-6, -2), (2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), (-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\}$ ہے۔

مشق 2.7

مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کریں۔

1. $x + y = 5 \quad ; \quad x^2 - 2y - 14 = 0$
2. $3x - 2y = 1 \quad ; \quad x^2 + xy - y^2 = 1$
3. $x - y = 7 \quad ; \quad \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = 2$
4. $x + y = a - b \quad ; \quad \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{y} = 2$
5. $x^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad ; \quad x^2 + y^2 + 4x = 1$
6. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5 \quad ; \quad (x + 2)^2 + y^2 = 5$
7. $x^2 + 2y^2 = 22 \quad ; \quad 5x^2 + y^2 = 29$

8. $4x^2 - 5y^2 = 6$; $3x^2 + y^2 = 14$
9. $7x^2 - 3y^2 = 4$; $2x^2 + 5y^2 = 7$
10. $x^2 + 2y^2 = 3$; $x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$
11. $3x^2 - y^2 = 26$; $3x^2 - 5xy - 12y^2 = 0$
12. $x^2 + xy = 5$; $y^2 + xy = 3$
13. $x^2 - 2xy = 7$; $xy + 3y^2 = 2$

2.7(ii) روزمرہ زندگی سے متعلق سوالات کو دو درجی مساوات کی مدد سے حل کرنا:

کئی سوالات کو دو درجی مساوات کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔ ایک مساوات بنانے میں نامعلوم مقداروں کے لیے علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ مساواتوں کے جوابات ان کے روٹس (Roots) کی شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 1: کسی عدد سے 3 کم کرنے اور دوگنا عدد سے 9 تفریق کرنے سے حاصل ضرب 104 بنتا ہے۔ عدد معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ مطلوبہ عدد x ہے۔

عدد سے 3 کم $= x - 3$

اور عدد کے دوگنا سے 9 کم $= 2x - 9$

سوال کی شرط کے مطابق

$$(x - 3)(2x - 9) = 104$$
$$2x^2 - 15x + 27 = 104$$
$$2x^2 - 15x - 77 = 0$$

تجزی کرنے سے

$$2x^2 + 7x - 22x - 77 = 0$$
$$x(2x + 7) - 11(2x + 7) = 0$$
$$(2x + 7)(x - 11) = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{7}{2}, \quad x = 11$$

یعنی مطلوبہ اعداد $-\frac{7}{2}$ اور 11 ہیں۔

مثال 2: ایک مستطیل کی لمبائی، چوڑائی سے 4 سم زیادہ ہے۔ اگر مستطیل کا رقبہ 45 مربع سم ہو تو اس کے اضلاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ سم میں چوڑائی x ہے تو لمبائی $x + 4$ ہو گی۔

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$x(x + 4) = 45$$
$$x^2 + 4x - 45 = 0$$
$$(x + 9)(x - 5) = 0$$

$x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ یا $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

اگر $x = 5$، تو $x + 4 = 5 + 4 = 9$ (منفی قیمت کو نظر انداز کرتے ہوئے)

پس چوڑائی 5 سم اور لمبائی 9 سم ہے۔

مثال 3: ایک نقطہ کے محددات کا مجموعہ 6 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 20 ہے۔ نقطہ کے محددات معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ (x, y) نقطہ کے محدد ہیں۔

دی ہوئی شرائط کے مطابق

$$x + y = 6 \quad \text{(i)}$$
$$x^2 + y^2 = 20 \quad \text{(ii)}$$

مساوات (i) سے

$$y = 6 - x \quad \text{(iii)}$$

مساوات (ii) میں $y = 6 - x$ درج کرنے سے

$$x^2 + (6 - x)^2 = 20$$
$$x^2 + 36 + x^2 - 12x - 20 = 0$$
$$2x^2 - 12x + 16 = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

تجزی کرنے سے

$$(x - 4)(x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

مساوات (iii) کے استعمال سے

$$y = 6 - 4 = 2 \quad \text{یا} \quad y = 6 - 2 = 4$$

پس نقطہ کے محددات $(4, 2)$ یا $(2, 4)$ ہیں۔

مشق 2.8

-1 دو مسلسل مثبت اعداد کا حاصل ضرب 182 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-2 تین مسلسل مثبت اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 77 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-3 ایک عدد کے 5 گنا اور اس کے مربع کا مجموعہ 204 ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-4 ایک عدد کے 3 گنا سے 5 کم اور 4 گنا سے 1 کم کا حاصل ضرب 7 ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-5 ایک عدد اور اس کے معکوس کا فرق $\frac{15}{4}$ ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-6 ایک مثبت صحیح عدد کے دو ہندسوں کے مربعوں کا مجموعہ 65 ہے اور عدد اپنے ہندسوں کے مجموعے کا 9 گنا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

-7 ایک نقطہ کے محددات کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 45 ہے۔ نقطہ کے محددات معلوم کیجیے۔

-8 دو صحیح اعداد کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا فرق بھی 9 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-9 دو صحیح اعداد کا فرق 4 ہے اور ان کے مربعوں کا فرق 72 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-10 ایک مستطیل کے اضلاع معلوم کیجیے جس کا احاطہ 80 سم اور اس کا رقبہ 375 مربع سم ہے۔

متفرق مشق 2

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) اگر α, β مساوات $3x^2 + 5x - 2 = 0$ کے روٹس ہوں تو $\alpha + \beta$ برابر ہے۔

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{-5}{3}$ (d) $\frac{-2}{3}$

(ii) اگر α, β مساوات $7x^2 - x + 4 = 0$ کے روٹس ہوں تو $\alpha\beta$ برابر ہے۔

(a) $\frac{-1}{7}$ (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{-4}{7}$

(iii) مساوات $4x^2 - 5x + 2 = 0$ کے روٹس ہیں۔

(a) غیر ناطق (b) غیر حقیقی (c) ناطق (d) کوئی نہیں

(iv) '-1' کے جذر المکعب ہیں۔

(a) $-1, -\omega, -\omega^2$ (b) $-1, \omega, -\omega^2$

(c) $-1, -\omega, \omega^2$ (d) $1, -\omega, -\omega^2$

(v) اکائی کے جذر المکعب کا مجموعہ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

(vi) اکائی کے جذر المکعب کا حاصل ضرب ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

(vii) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس ہوتے ہیں۔

(a) غیر ناطق (b) ناطق (c) غیر حقیقی (d) کوئی نہیں

(viii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ لیکن مکمل مربع نہ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس ہیں۔

(a) غیر حقیقی (b) ناطق (c) غیر ناطق (d) کوئی نہیں

(ix) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ برابر ہے۔

(a) $\frac{1}{\alpha}$ (b) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$ (c) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$ (d) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

(x) $\alpha^2+\beta^2$ برابر ہے۔

(a) $\alpha^2-\beta^2$ (b) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

(c) $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ (d) $\alpha+\beta$

(xi) اکائی کے دو جذر المربع ہیں۔

(a) $1, -1$ (b) $1, \omega$ (c) $1, -\omega$ (d) ω, ω^2

(xii) مساوات $4x^2-4x+1=0$ کے روٹس ہیں۔

(a) برابر، حقیقی (b) نابرابر، حقیقی (c) غیر حقیقی (d) غیر ناطق

(xiii) اگر α، β مساوات $px^2+qx+r=0$ کے روٹس ہوں تو روٹس (Roots) ہوں تو 2α اور 2β کا مجموعہ ہے۔

(a) $\frac{-q}{p}$ (b) $\frac{r}{p}$ (c) $\frac{-2q}{p}$ (d) $-\frac{q}{2p}$

(xiv) اگر α, β مساوات $x^2-x-1=0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو 2α اور 2β کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

(a) -2 (b) 2 (c) 4 (d) -4

(xv) مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے روٹس کی اقسام کو ـــــــ کہا جاتا ہے۔

(a) روٹس کا مجموعہ (b) روٹس کا حاصل ضرب

(c) ترکیبی تقسیم (d) فرق کنندہ

(xvi) مساوات $ax^2+bx+c=0$ کا فرق کنندہ ہوتا ہے۔

(a) b^2-4ac (b) b^2+4ac (c) $-b^2+4ac$ (d) $-b^2-4ac$

-2 درجِ ذیل سوالات کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) مندرجہ ذیل مساواتوں کے روٹس (Roots) کی اقسام پر بحث کیجیے۔

(a) $x^2+3x+5=0$ (b) $2x^2-7x+3=0$

(c) $x^2+6x-1=0$ (d) $16x^2-8x+1=0$

(ii) اگر $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ہو تو ω^2 معلوم کیجیے۔

(iii) ثابت کریں کہ اکائی کے تمام جذر المکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

(iv) اکائی کے غیر حقیقی جذر المکعب کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(v) ثابت کیجیے کہ $x^3+y^3=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

(vi) $1 + \omega^{37} + \omega^{38}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(vii) $(1 - \omega + \omega^2)^6$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(viii) اگر "ω" اکائی کا جذر المکعب ہو تو ایسی مساوات بنائیں جس کے روٹس "3ω" اور "$3\omega^2$" ہوں۔

(ix) ترکیبی تقسیم کی مدد سے باقی اور حاصل قسمت معلوم کیجیے جبکہ $(x^3 + 3x^2 + 2) \div (x - 2)$

(x) ترکیبی تقسیم کی مدد سے ثابت کیجیے کہ $x - 2$، $x^3 + x^2 - 7x + 2$ کا جزو ضربی ہے۔

(xi) مساوات $2px^2 + 3qx - 4r = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(xii) اگر α, β مساوات $x^2 - 4x + 3 = 0$ کے روٹس ہوں تو $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(xiii) اگر α, β مساوات $4x^2 - 3x + 6 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو معلوم کیجیے۔

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (c) $\alpha - \beta$

(xiv) اگر α, β مساوات $x^2 - 5x + 7 = 0$ کے روٹس ہوں تو دیے ہوئے روٹس کی مساوات معلوم کیجیے۔

(a) $-\alpha, -\beta$ (b) $2\alpha, 2\beta$.

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا فرق کنندہ __________ ہے۔

(ii) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(iii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(iv) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(v) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور مکمل مربع ہو تو $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(vi) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور مکمل مربع نہ ہو تو $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس __________ ہوتے ہیں۔

(vii) اگر α, β مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا مجموعہ __________ ہوتا ہے۔

(viii) اگر α, β مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا حاصل ضرب ______ ہوتا ہے۔

(ix) اگر α, β مساوات $7x^2 - 5x + 3 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا مجموعہ __________ ہوتا ہے۔

(x) اگر α, β مساوات $5x^2 + 3x - 9 = 0$ کے روٹس (Roots) ہوں تو ان کا حاصل ضرب __________ ہوتا ہے۔

(xi) دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے لیے $\frac{1}{\alpha\beta}$ __________ کے برابر ہوتا ہے۔

(xii) اکائی کے جذر المکعب __________ ہیں۔

(xiii) مستعمل علامتوں میں اکائی کے جذر المکعب کا مجموعہ __________ ہوتا ہے۔

(xiv) اگر اکائی کے جذر المکعب $1, \omega, \omega^2$ ہوں تو ω^{-7}، __________ کے برابر ہوتا ہے۔

(xv) اگر α, β دو درجی مساوات کے روٹس (Roots) ہوں تو مساوات کو __________ یوں لکھا جاتا ہے۔

(xvi) اگر 2ω اور $2\omega^2$ مساوات کے روٹس (Roots) ہوں تو مساوات __________ ہوتی ہے۔

خلاصہ

- دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c$ کا فرق کنندہ "$b^2 - 4ac$" ہوتا ہے۔
- اکائی کے جذر المکعب 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ہوتے ہیں۔
- اکائی کے غیر حقیقی جذر المکعب ω اور ω^2 ہیں۔
- اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات:

(a) اکائی کے جذر المکعب کا حاصل ضرب "1" کے برابر ہوتا ہے یعنی $1 \,.\, \omega \,.\, \omega^2 = \omega^3 = 1$

(b) اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کا معکوس ہے۔

(c) اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کے مربع (Square) کے برابر ہوتا ہے۔

(d) اکائی کے تمام جذر المکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ یعنی $1 + \omega + \omega^2 = 0$

- دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ کے روٹس (Roots)

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ اور } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ہیں۔

- دو درجی $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ کے روٹس (Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب بالترتیب

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ اور } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$ ہیں۔

- دو درجی مساوات کے روٹس پر مشتمل جملے جو تفاعل کو بیان کرتے ہیں۔ اگر روٹس کو بدلنے سے جملے کی قیمت تبدیل نہ ہو تو ایسے تفاعل کو سیمیٹرک تفاعل کہتے ہیں۔
- اگر روٹس (Roots) دیئے ہوئے ہوں تو دو درجی مساوات بنتی ہے۔

$$x^2 - (\text{اصلوں کا مجموعہ})\, x + (\text{اصلوں کا حاصلِ ضرب}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0.$$

- جب کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ تو حاصل قسمت اور باقی معلوم کرنے کے طریقہ کو ترکیبی تقسیم کہتے ہیں۔
- دو متغیروں میں دو مساواتیں جن کا حل سیٹ مشترک ہو ہمزاد مساواتیں کہلاتی ہیں۔

یونٹ 3

تغیرات

(VARIATIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- نسبت، تناسب اور تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کرنا
- تیسرا، چوتھا، وسط اور مسلسل تناسب معلوم کرنا
- تناسب معلوم کرنے کے لیے عکس نسبت، ابدال نسبت، ترکیب نسبت تفصیل نسبت اور ترکیب و تفصیل نسبت کے مسئلوں کا استعمال کرنا
- مشترک تغیر کی تعریف
- مشترک تغیر سے متعلق سوالات کا حل کرنا
- تناسب پر مشتمل مشروط مساواتوں کو K- طریقہ کے استعمال سے حل کرنا
- روزمرہ زندگی میں تغیرات پر مشتمل سوالات کا حل

3.1 نسبت، تناسب اور تغیرات
(Ratio, Proportions and Variations)

3.1(i) (a) نسبت (b) تناسب اور (c) تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کریں۔

(a) نسبت (Ratio)

دو ہم قسم مقداروں کے درمیان تعلق نسبت کہلاتا ہے۔ اگر a اور b دو ہم قسم مقداریں ہوں اور b صفر نہ ہو تو a اور b کی نسبت کو $a : b$ یا کسر میں $\frac{a}{b}$ لکھتے ہیں۔ یاد رہے کہ دونوں مقداروں کی پیمائش کی اکائی ایک ہی ہوتی ہے۔

مثلاً اگر ایک ہاکی کی ٹیم کھیل میں 4 میچ جیتی اور 5 میچ ہارتی ہے۔ تو میچوں میں جیت اور ہار کی نسبت 4:5 یا کسر میں $\frac{4}{5}$ ہوتی ہے۔

یاد رکھیے۔

(i) نسبت کے ارکان کی ترتیب اہم ہوتی ہے۔

(ii) نسبت $a : b$ میں پہلی رقم a (antecedent) کہلاتی ہے۔ اور دوسری رقم b (consequent) کہلاتی ہے۔

(iii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی۔

مثال 1: نسبت معلوم کریں۔

(i) 200 گرام سے 700 گرام (ii) 1 کلومیٹر سے 600 میٹر

حل: (i) 200 گرام سے 700 گرام کی نسبت

$$200 : 700 = \frac{200}{700} = \frac{2}{7} = 2 : 7$$

جبکہ 2 : 7 نسبت 200 : 700 کی آسان (مختصر) شکل ہے۔

(ii) 1 کلومیٹر سے 600 میٹر کی نسبت

کیونکہ 1 کلومیٹر = 1000 میٹر

تب $1000 : 600 = \frac{1000}{600} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 5 : 3$

یا 1 کلومیٹر : 600 میٹر $= 1000 : 600 = \frac{1000}{100} : \frac{600}{100}$

$$= 10 : 6 = 5 : 3$$

مثال 2: اگر نسبت $a + 3 : 7 + a$ اور $4 : 5$ برابر ہوں۔ تو a معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ نسبتیں $a + 3 : 7 + a$ اور $4 : 5$ برابر ہیں۔

اس لیے کسری شکل میں

$$\frac{a+3}{7+a} = \frac{4}{5}$$

$$5(a+3) = 4(7+a)$$

$$5a + 15 = 28 + 4a$$

$$5a - 4a = 28 - 15$$

$$a = 13$$

پس دی ہوئی نسبتیں برابر ہوں گی اگر $a = 13$ ہو۔

مثال 3: اگر نسبت $4 : 3$ کے ہر عدد میں 2 جمع کیا جائے۔ تو ہم ایک نئی نسبت $6 : 5$ حاصل ہوتی ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ دو اعداد کی نسبت $4 : 3$ ہے۔ نسبت کے ہر عدد کو x سے ضرب دیں تو اعداد $3x, 4x$ ہو جاتے ہیں اور نسبت $4x : 3x$ ہو جاتی ہے۔

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\frac{3x+2}{4x+2} = \frac{5}{6}$$

$$6(3x+2) = 5(4x+2) \quad \Rightarrow \quad 18x + 12 = 20x + 10$$

$$18x - 20x = 10 - 12 \quad \Rightarrow \quad -2x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

پس مطلوبہ اعداد درج ذیل ہیں۔

$4x = 4(1) = 4$ اور $3x = 3(1) = 3$

مثال 4: اگر $a : b = 5 : 8$ ہو تو نسبت $3a + 4b : 5a + 7b$ معلوم کیجیے۔

حل: دی ہوئی نسبت $a : b = 5 : 8$ ہے جس کو کسر میں یوں لکھتے ہیں $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$

اب

$$3a + 4b : 5a + 7b = \frac{3a+4b}{5a+7b}$$

شمار کنندہ اور مخرج کو b پر تقسیم کرنے سے

$$= \frac{\frac{3a+4b}{b}}{\frac{5a+7b}{b}} = \frac{3\left(\frac{a}{b}\right) + 4\left(\frac{b}{b}\right)}{5\left(\frac{a}{b}\right) + 7\left(\frac{b}{b}\right)}$$

$$= \frac{3\left(\frac{5}{8}\right) + 4(1)}{5\left(\frac{5}{8}\right) + 7(1)} \qquad \left(\because \ \frac{a}{b} = \frac{5}{8}\right)$$

$$=\frac{\frac{15}{8}+4}{\frac{25}{8}+7}=\frac{\frac{15+32}{8}}{\frac{25+56}{8}}=\frac{47}{81}$$

پس $3a+4b : 5a+7b = 47 : 81$

(b) تناسب (Proportion)

تناسب بیان کردہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر دو نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ برابر ہوں تو ہم ان کو $a : b = c : d$ لکھ سکتے ہیں۔

پہلی اور آخری مقداروں a, d کو طرفین، جبکہ b, c کو وسطین کہتے ہیں۔ علامت کے طور پر a, b, c اور d کو اس طرح لکھتے ہیں۔

$$a : b :: c : d$$

$$\Rightarrow \quad a : b = c : d \quad \text{یا} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

یعنی $ad = bc$

مثال 5: x معلوم کیجیے۔ اگر x کلوگرام : 20 کلوگرام :: 90 میٹر : 60 میٹر

حل: x کلوگرام : 20 کلوگرام :: 90 میٹر : 60 میٹر

یعنی $60 : 90 = 20 : x$

کیونکہ وسطین کی حاصل ضرب = طرفین کی حاصل ضرب

اس لیے $60x = 90 \times 20$

$$x=\frac{90\times 20}{60}=30$$

پس x، 30 کلوگرام کے برابر ہے۔

مثال 6: اگر 7 کلوگرام چینی کی قیمت 560 روپے ہو تو 15 کلوگرام چینی کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ 15 کلوگرام چینی کی قیمت x روپے ہے۔

تب تناسب کی شکل میں 560 روپے : x روپے :: کلوگرام 7 : کلوگرام 15

یعنی $15 : 7 = x : 560$

کیونکہ وسطین کی حاصل ضرب = طرفین کی حاصل ضرب

$$15 \times 560 = 7x$$
$$7x = 15 \times 560$$
$$x = \frac{15 \times 560}{7} = 15(80) = 1200$$

پس 15 کلو گرام چینی کی قیمت 1200 روپے ہے۔

مشق 3.1

-1 مندرجہ ذیل کو نسبت $a : b$ اور کسر کی آسان (مختصر) شکل میں ظاہر کریں۔

(i) 1250 روپے : 750 روپے (ii) 3 میٹر : 450 سم

(iii) 2 کلو گرام 750 گرام : 4 کلو گرام (iv) 1 گھنٹہ : 27 منٹ 30 سکینڈ

(v) $75^{\circ} : 225^{\circ}$

-2 60 طلبا کی کلاس میں 25 لڑکیاں اور باقی لڑکے ہیں۔ نسبت معلوم کریں۔

(i) لڑکوں کی تمام طلبا سے (ii) لڑکوں کی لڑکیوں سے

-3 اگر $3(4x - 5y) = 2x - 7y$، تو نسبت $x : y$ معلوم کیجیے۔

-4 p کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر نسبتیں $2p + 5 : 3p + 4$ اور $3 : 4$ برابر ہوں۔

-5 اگر نسبتیں $3x + 1 : 6 + 4x$ اور $2 : 5$ برابر ہوں تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

-6 دو اعداد میں نسبت $5 : 8$ ہے۔ اگر ہر عدد میں 9 جمع کریں۔ تو ہم نئی نسبت $8 : 11$ حاصل کرتے ہیں۔ اعداد معلوم کیجیے۔

-7 اگر نسبت $4 : 13$ کے ہر عدد میں 10 جمع کریں تو ہم نئی نسبت $1 : 2$ حاصل کرتے ہیں۔ اعداد کیا ہیں؟

-8 اگر 5 کلو گرام آموں کی قیمت 250 روپے ہو تو 8 کلو گرام کی قیمت معلوم کیجیے۔

-9 اگر $a : b = 7 : 6$ تو $3a + 5b : 7b - 5a$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

-10 مکمل کریں۔

(i) اگر $\frac{24}{7} = \frac{6}{x}$ تو $4x = \_\_\_\_\_\_\_\_$

(ii) اگر $\frac{5a}{3x} = \frac{15b}{y}$ تو $ay = \_\_\_\_\_\_\_\_$

(iii) اگر $\frac{9pq}{2lm} = \frac{18p}{5m}$ تو $5q = \_\_\_\_\_\_\_\_$

11- مندرجہ ذیل تناسب میں x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $3x - 2 : 4 :: 2x + 3 : 7$ (ii) $\frac{3x-1}{7} : \frac{3}{5} :: \frac{2x}{3} : \frac{7}{5}$

(iii) $\frac{x-3}{2} : \frac{5}{x-1} :: \frac{x-1}{3} : \frac{4}{x+4}$ (iv) $p^2 + pq + q^2 : x :: \frac{p^3 - q^3}{p+q} : (p-q)^2$

(v) $8 - x : 11 - x :: 16 - x : 25 - x$

(c) تغیر (Variation)

تمام سائنسی علوم میں تغیر کا لفظ بہت استعمال ہوتا ہے۔ تغیرات کی دو اقسام ہیں۔

(i) تغیر راست (ii) تغیر معکوس

(i) تغیر راست (Direct Variation)

اگر دو مقداروں کے درمیان تعلق اس طرح کا ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے) سے دوسری مقدار اسی نسبت سے بڑھے (کم) ہو تو ایسا تعلق **تغیر راست** کہلاتا ہے۔ اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ اگر ایک مقدار y راست تناسب میں ہے x کے۔ تو ہم کہتے ہیں کہ y تغیر راست ہے x کا اور اس کو $y \propto x$ یا $y = kx$ لکھتے ہیں۔ اس لیے

$$\frac{y}{x} = k \quad , \quad k \neq 0$$

$\propto$ تغیر کی علامت ہے۔ اسکو تناسب یا تغیر کی علامت کہتے ہیں۔ جبکہ $k \neq 0$ تغیر کا مستقل ہے۔

مثلاً (i) جتنی گاڑی کی رفتار تیز ہو گی اتنا زیادہ فاصلہ وہ طے کرے گی۔

(ii) جتنا دائرے کا رداس چھوٹا ہو گا اتنا ہی محیط چھوٹا ہو گا۔

مثال 1: حالت سکون میں بلندی d سے گرنے والے جسم اور وقت t کے مربع کے راست تناسب میں تعلق معلوم کیجیے۔ جبکہ ہوا کی مزاحمت نہ ہو۔ اگر 1 سیکنڈ $= t$، فاصلہ 16 فٹ $= d$ ہو تو k معلوم کیجیے۔ d اور t کے درمیان تعلق بھی اخذ کیجیے۔

حل: کیونکہ t وقت میں حالت سکون سے گرنے والے جسم کی بلندی d ہے۔ تو سوال کی شرط کے مطابق

$$d \propto t^2$$

اس لیے (i) $d = kt^2$

چونکہ 16 فٹ $= d$ اور 1 سیکنڈ $= t$

تو مساوات (i) سے

$$16 = k\,(1)^2$$

یعنی $k = 16$

مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$d = 16t^2$$

جو کہ وقت t اور فاصلہ d کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

سرگرمی

اوپر دی گئی مساوات میں (i) وقت t معلوم کیجیے، جب $d =$ 64 فٹ

(ii) فاصلہ d معلوم کیجیے، جب $t =$ 3 سیکنڈ

مثال 2: اگر x اور y میں تغیر راست ہو تو معلوم کیجیے۔

(a) x اور y میں مساوات

(b) تغیر کا مستقل k، x اور y میں تعلق جب $x = 7$ اور $y = 6$

(c) y کی قیمت، جب $x = 21$

حل: (a) دیے ہوئے x اور y میں تغیر راست ہے۔ اس لیے

$$y \propto x$$

اگر k تغیر کا مستقل ہو تو

$$y = kx \qquad \text{(i)}$$

(b) مساوات (i) میں $x = 7$ اور $y = 6$ درج کرنے سے

مساوات (i) میں $k = \frac{6}{7}$ درج کرنے سے

$$y = \frac{6}{7}x \qquad \text{(ii)}$$

(c) اب مساوات (ii) میں $x = 21$ درج کرنے سے

$$y = \frac{6}{7}(21) = 18$$

مثال 3: اگر A اور r کے مربع میں تغیر راست دیا ہوا ہو اور $A = \frac{1782}{7}$ مربع سم، جب $r =$ 9 سم

اگر $r =$ 14 سم تو A کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ A اور r کے مربع میں تغیر راست ہے۔

اس لیے $$A \propto r^2$$

یا $$A = kr^2 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{1782}{7} = k(9)^2$$

$$\frac{1782}{7 \times 81} = k \qquad \text{یا} \qquad k = \frac{22}{7}$$

مساوات (i) میں $k = \frac{22}{7}$ اور 14 سم $= r$ درج کرنے سے

$$A = \frac{22}{7}(14)^2 = \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$$

پس A، 616 مربع سم ہے۔

مثال 4: اگر y اور x کے مکعب میں تغیر راست دیا ہو اور $y = 81$ جب $x = 3$، پس y کی قیمت معلوم کیجیے جب $x = 5$

حل: y اور x کے مکعب میں تغیر راست دیا ہوا ہے۔ اس لیے

یعنی (i) $y \propto x^3$ (جبکہ k مستقل ہے)

$y = kx^3$

$x = 3$ اور $y = 81$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$81 = k(3)^3 \quad \Rightarrow \quad 27k = 81 \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

$k = 3$ اور $x = 5$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$y = 3(5)^3 = 375$$

(ii) تغیر معکوس (Inverse Variation)

اگر دو مقداروں کے درمیان تعلق اس طرح کا ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے) سے دوسری مقدار اسی نسبت سے کم ہو (بڑھے) تو ایسا تعلق **تغیر معکوس** کہلاتا ہے۔

اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ ایک مقدار y دوسری مقدار x کے لحاظ سے تغیر معکوس میں ہے۔

اس کو ہم y تناسب معکوس ہے x کا یا تغیر معکوس ہے x کا پڑھتے ہیں، اور $y \propto \frac{1}{x}$ یا $y = \frac{k}{x}$ لکھتے ہیں۔

یعنی $xy = k$، جبکہ $k \neq 0$ تغیر کا مستقل ہے۔

مثال 1: اگر x اور y تغیر معکوس میں ہوں اور $y = 8$ جب $x = 4$، تو y معلوم کیجیے جب $x = 16$

حل: کیونکہ x اور y تغیر معکوس میں ہیں اس لیے

$$y \propto \frac{1}{x}$$

یا

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad xy = k \quad \text{(ii)}$$

$x = 4$ اور $y = 8$ مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$k = (x)(y) = (4)(8) = 32$$

$k = 32$ اور $x = 16$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$y = \frac{32}{16} = 2$$

مثال 2: اگر y اور x^2 تغیر معکوس میں ہوں اور $y = 16$ جب $x = 5$ ہو تو x معلوم کیجیے جب $y = 100$

حل : چونکہ y اور x^2 تغیر معکوس میں ہیں۔ اس لیے $y = \frac{k}{x^2}$ یا $y \propto \frac{1}{x^2}$

$$k = x^2y \qquad \text{(i)}$$

$x = 5$ اور $y = 16$ کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$k = (5)^2 \times 16 = 400$$

$k = 400$ اور $y = 100$ کی قیمتیں مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$400 = 100x^2$$

$$x^2 = \frac{400}{100} = 4 \qquad \text{یا} \qquad x = \pm 2$$

مشق 3.2

-1 اگر x اور y تغیر راست میں ہوں اور $y = 8$ جبکہ $x = 2$ ہو تو معلوم کیجیے:

(i) y کی قیمت x میں (ii) y جبکہ $x = 5$ (iii) x جبکہ $y = 28$

-2 اگر $y \propto x$ ہو اور $y = 7$ جب $x = 3$ ہو تو معلوم کیجیے۔

(i) y کی قیمت x میں (ii) x جبکہ $y = 35$ اور y جبکہ $x = 18$ ہے۔

-3 اگر $R \propto T$ ہو اور $R = 5$ جبکہ $T = 8$، تو R اور T میں مساوات معلوم کیجیے۔ نیز R معلوم کریں جب $T = 64$ اور T معلوم کیجیے جبکہ $R = 20$ ہو۔

-4 اگر $R \propto T^2$ اور $R = 8$ جب $T = 3$، ہو تو R معلوم کیجیے جبکہ $T = 6$ ہو۔

-5 اگر $V \propto R^3$ اور $V = 5$ جب $R = 3$، ہو تو R معلوم کیجیے جبکہ $V = 625$ ہو۔

-6 اگر w اور u^3 میں تغیر راست ہے اور $w = 81$ جب $u = 3$ ہو۔ w معلوم کیجیے جبکہ $u = 5$ ہو۔

-7 اگر y اور x میں تغیر معکوس ہو اور $y = 7$ جب $x = 2$ ہو، y معلوم کیجیے جبکہ $x = 126$ ہو۔

-8 اگر $y \propto \frac{1}{x}$ اور $y = 4$ جب $x = 3$ ہو تو x معلوم کیجیے جبکہ $y = 24$ ہو۔

-9 اگر $w \propto \frac{1}{z}$ اور $w = 5$ جب $z = 7$ ہو تو w معلوم کیجیے جبکہ $z = \frac{175}{4}$ ہو۔

-10 اگر $A \propto \frac{1}{r^2}$ اور $A = 2$ جب $r = 3$ ہے، r معلوم کیجیے جبکہ $A = 72$ ہو۔

-11 $a \propto \frac{1}{b^2}$ اور $a = 3$ جب $b = 4$ ہے، a معلوم کیجیے جبکہ $b = 8$ ہو۔

-12 $V \propto \frac{1}{r^3}$ اور $V = 5$ جب $r = 3$ ہے۔ V معلوم کیجیے جب $r = 6$ اور r معلوم کیجیے جبکہ $V = 320$ ہو۔

-13 $m \propto \frac{1}{n^3}$ اور $m = 2$ جبکہ $n = 4$ ہو تو m معلوم کیجیے جب $n = 6$ اور n معلوم کیجیے جب $m = 432$ ہو۔

3.1(ii) تیسرا، چوتھا وسطی التناسب اور مسلسل تناسب

ہم پہلے ہی تناسب سے واقف ہیں کہ اگر چار مقداریں a، b، c اور d تو ناسب میں ہوں تو $a : b :: c : d$

یعنی وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

تیسرا متناسب (Third Proportional)

اگر تین مقداروں a، b اور c میں اس طرح کا تعلق ہو کہ $a : b :: b : c$

تو c تیسرا متناسب کہلاتا ہے۔

مثال 1: $x + y$ اور $x^2 - y^2$ کا تیسرا متناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ تیسرا متناسب c ہے تو

$$x + y : x^2 - y^2 :: x^2 - y^2 : c$$

$$c\,(x + y) = (x^2 - y^2)\,(x^2 - y^2)$$

$$c = \frac{(x^2 - y^2)\,(x^2 - y^2)}{x + y} = \frac{(x^2 - y^2)\,(x - y)\,(x + y)}{(x + y)}$$

$$c = (x^2 - y^2)\,(x - y) = (x + y)\,(x - y)^2$$

چوتھا متناسب (Fourth Proportional)

اگر مقداروں a, b, c اور d میں تعلق اس طرح ہو کہ

$$a : b :: c : d$$

تو d چوتھا متناسب کہلاتا ہے۔

مثال 2: $a^3 + b^3$, $a + b$ اور $a^2 + ab + b^2$ کا چوتھا متناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ چوتھا متناسب x ہے تو

$$(a^3 - b^3) : (a + b) :: (a^2 + ab + b^2) : x$$

یعنی

$$x\,(a^3 - b^3) = (a + b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$x = \frac{(a + b)\,(a^2 + ab + b^2)}{a^3 - b^3} = \frac{(a + b)\,(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)\,(a^2 + ab + b^2)}$$

یا

$$x = \frac{a + b}{a - b}$$

وسطی التناسب (Mean Proportional)

اگر تین مقداروں a, b اور c میں تعلق اس طرح ہو کہ $a : b :: b : c$

تو "b" وسطی التناسب کہلاتا ہے۔

مثال 3: $9p^6q^4$ اور r^8 کا وسطی التناسب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں کہ m وسطی التناسب ہے تو $9p^6q^4 : m :: m : r^8$

یا $m \cdot m = 9p^6q^4\,(r^8)$

$$m^2 = 9p^6q^4r^8$$

$$m = \pm\sqrt{9p^6q^4r^8} = \pm\, 3p^3q^2r^4$$

مسلسل تناسب (Continued Proportion)

اگر تین مقداروں a, b اور c میں تعلق اس طرح ہو کہ $a : b :: b : c$

جب کہ a پہلا تناسب ہو، b وسطی التناسب ہو اور c تیسر اتناسب ہو تو a, b اور c مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

مثال 4: اگر 12, p اور 3 مسلسل تناسب میں ہوں۔ تو p معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ 12, p اور 3 میں مسلسل تناسب ہے۔ اس لیے

$$12 : p :: p : 3$$

$$p \cdot p = (12)(3) \quad \Rightarrow \quad p^2 = 36$$

پس $p = \pm 6$

مشق 3.3

-1 تیسر اتناسب معلوم کیجیے۔

(i) $6, 12$ (ii) $a^3, 3a^2$

(iii) $a^2 - b^2, a - b$ (iv) $(x - y)^2, x^3 - y^3$

(v) $(x + y)^2, x^2 - xy - 2y^2$ (vi) $\dfrac{p^2 - q^2}{p^3 + q^3}, \dfrac{p - q}{p^2 - pq + q^2}$

-2 چوتھا تناسب معلوم کیجیے۔

(i) $5, 8, 15$ (ii) $4x^4, 2x^3, 18x^5$

(iii) $15a^5b^6, 10a^2b^5, 21a^3b^3$ (iv) $x^2 - 11x + 24, (x - 3), 5x^4 - 40x^3$

(v) $p^3 + q^3, p^2 - q^2, p^2 - pq + q^2$

(vi) $(p^2 - q^2)(p^2 + pq + q^2), p^3 + q^3, p^3 - q^3$

-3 وسط فی التناسب معلوم کیجیے۔

(i) $20, 45$ (ii) $20x^3y^5, 5x^7y$

(iii) $15p^4qr^3, 135q^5r^7$ (iv) $x^2 - y^2, \frac{x-y}{x+y}$

-4 مندرجہ ذیل میں مسلسل تناسب ہے۔ دیے گئے متغیر کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $5, p, 45$ (ii) $8, x, 18$

(iii) $12, 3p-6, 27$ (iv) $7, m-3, 28$

3.2 تناسب کے مسئلے (Theorems on Proportions)

اگر چار مقداریں a، b، c اور d تناسب میں ہوں تو کسور کی خصوصیات سے بہت سی دوسری مفید خصوصیات اخذ کی جاسکتی ہیں۔

(1) مسئلہ عکس نسبت (Theorem of Invertendo)

اگر $a : b = c : d$ ہو تو $b : a = d : c$ ہوتا ہے۔

مثال 1: اگر $3m : 2n = p : 2q$ ہو تو ثابت کریں $2n : 3m = 2q : p$

حل: چونکہ $3m : 2n = p : 2q$ اس لیے

$$\frac{3m}{2n} = \frac{p}{2q}$$

مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$\frac{2n}{3m} = \frac{2q}{p}$$

پس

$$2n : 3m = 2q : p$$

(2) مسئلہ ابدال نسبت (Theorem of Alternando)

اگر $a : b = c : d$ تو $a : c = b : d$

مثال 2: اگر $3p+1 : 2q = 5r : 7s$ تو ثابت کیجیے کہ $3p+1 : 5r = 2q : 7s$

حل: دیا ہوا ہے کہ $3p+1 : 2q = 5r : 7s$

اس لیے

$$\frac{3p+1}{2q} = \frac{5r}{7s}$$

مسئلہ ابدال کی رو سے

$$\frac{3p+1}{5r} = \frac{2q}{7s}$$

پس

$$3p+1 : 5r = 2q : 7s$$

(3) مسئلہ ترکیب نسبت (Theorem of Componendo)

اگر $a : b = c : d$ تو

(i) $a + b : b = c + d : d$

اور (ii) $a : a + b = c : c + d$

مثال 3: اگر $m + 3 : n = p : q - 2$ ہو تو ثابت کیجیے۔ $m + n + 3 : n = p + q - 2 : q - 2$

حل: چونکہ $m + 3 : n = p : q - 2$ اس لیے

$$\frac{m+3}{n} = \frac{p}{q-2}$$

مسئلہ ترکیب نسبت کی رو سے

$$\frac{(m+3)+n}{n} = \frac{p+(q-2)}{q-2}$$

یا

$$\frac{m+n+3}{n} = \frac{p+q-2}{q-2}$$

پس

$$m + n + 3 : n = p + q - 2 : q - 2$$

(4) مسئلہ تفصیل نسبت (Theorem of Dividendo)

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a - b : b = c - d : d$

اور (ii) $a : a - b = c : c - d$

مثال 4: اگر $m + 1 : n - 2 = 2p + 3 : 3q + 1$ ہو تو ثابت کیجیے۔

$$m - n + 3 : n - 2 = 2p - 3q + 2 : 3q + 1$$

حل: فرض کریں کہ $m + 1 : n - 2 = 2p + 3 : 3q + 1$ تو

$$\frac{m+1}{n-2} = \frac{2p+3}{3q+1}$$

مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(m+1)-(n-2)}{n-2} = \frac{(2p+3)-(3q+1)}{3q+1}$$

یا

$$\frac{m-n+3}{n-2} = \frac{2p-3q+2}{3q+1}$$

پس

$$m - n + 3 : n - 2 = 2p - 3q + 2 : 3q + 1$$

(5) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (Theorem of Componendo-dividendo)

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a + b : a - b = c + d : c - d$

اور (ii) $a - b : a + b = c - d : c + d$

مثال 5: اگر $m : n = p : q$ ہو تو ثابت کیجیے۔

$$3m + 7n : 3m - 7n = 3p + 7q : 3p - 7q$$

حل: چونکہ $m : n = p : q$

یا $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

طرفین کو $\frac{3}{7}$ سے ضرب دینے سے $\frac{3m}{7n} = \frac{3p}{7q}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے $\frac{3m + 7n}{3m - 7n} = \frac{3p + 7q}{3p - 7q}$

پس $3m + 7n : 3m - 7n = 3p + 7q : 3p - 7q$

مثال 6: اگر $5m + 3n : 5m - 3n = 5p + 3q : 5p - 3q$ ہو تو ثابت کیجیے۔ $m : n = p : q$

حل: فرض کریں کہ $5m + 3n : 5m - 3n = 5p + 3q : 5p - 3q$

یا $\frac{5m + 3n}{5m - 3n} = \frac{5p + 3q}{5p - 3q}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(5m + 3n) + (5m - 3n)}{(5m + 3n) - (5m - 3n)} = \frac{(5p + 3q) + (5p - 3q)}{(5p + 3q) - (5p - 3q)}$$

$$\frac{5m + 3n + 5m - 3n}{5m + 3n - 5m + 3n} = \frac{5p + 3q + 5p - 3q}{5p + 3q - 5p + 3q}$$

$$\frac{10m}{6n} = \frac{10p}{6q}$$

طرفین کو $\frac{6}{10}$ سے ضرب دینے سے $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

یعنی $m : n = p : q$

مثال 7: اگر $m = \frac{6pq}{p + q}$ ہو تو $\frac{m + 2q}{m - 2q} + \frac{m + 3p}{m - 3p}$ کی قیمت مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $m = \frac{6pq}{p + q}$

یا $m = \frac{(3p)(2q)}{p + q}$ (i)

اس لیے

$$\frac{m}{3p}=\frac{2q}{p+q}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{m+3p}{m-3p}=\frac{2q+(p+q)}{2q-(p+q)}=\frac{2q+p+q}{2q-p-q}$$

$$\frac{m+3p}{m-3p}=\frac{p+3q}{q-p} \qquad \text{(ii)}$$

اب مساوات (i) سے

$$\frac{m}{2q}=\frac{3p}{p+q}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{m+2q}{m-2q}=\frac{3p+(p+q)}{3p-(p+q)}=\frac{3p+p+q}{3p-p-q}$$

$$\frac{m+2q}{m-2q}=\frac{4p+q}{2p-q} \qquad \text{(iii)}$$

(ii) اور (iii) کو جمع کرنے سے

$$\frac{m+3p}{m-3p}+\frac{m+2q}{m-2q}=\frac{p+3q}{q-p}+\frac{4p+q}{2p-q}=-\frac{p+3q}{p-q}+\frac{4p+q}{2p-q}$$

$$=\frac{-(p+3q)(2p-q)+(p-q)(4p+q)}{(p-q)(2p-q)}$$

$$=\frac{-2p^2-5pq+3q^2+4p^2-3pq-q^2}{(p-q)(2p-q)}$$

$$=\frac{2p^2-8pq+2q^2}{(p-q)(2p-q)}=\frac{2(p^2-4pq+q^2)}{(p-q)(2p-q)}$$

مثال 8: مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت استعمال کرتے ہوئے مساوات $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}=\frac{4}{3}$ کو حل کریں۔

حل: مساوات $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}=\frac{4}{3}$ دی ہوئی ہے۔

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}=\frac{4+3}{4-3}$$

$$\frac{\cancel{2}\sqrt{x+3}}{\cancel{2}\sqrt{x-3}} = \frac{7}{1} \Rightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = 7$$

طرفین کا مربع لینے سے

$$\frac{x+3}{x-3} = 49$$

$$x + 3 = 49(x-3) \Rightarrow x + 3 = 49x - 147 \Rightarrow x - 49x = -147 - 3$$

$$-48x = -150 \Rightarrow 48x = 150 \Rightarrow x = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}$$

مثال 9: مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کے استعمال سے مساوات $\frac{(x+3)^2-(x-5)^2}{(x+3)^2+(x-5)^2} = \frac{4}{5}$ کو حل کیجیے۔

حل: مساوات $\frac{(x+3)^2-(x-5)^2}{(x+3)^2+(x-5)^2} = \frac{4}{5}$ دی ہوئی ہے۔

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{(x+3)^2-(x-5)^2+(x+3)^2+(x-5)^2}{(x+3)^2-(x-5)^2-(x+3)^2-(x-5)^2} = \frac{4+5}{4-5}$$

$$\frac{2(x+3)^2}{-2(x-5)^2} = \frac{9}{-1} \Rightarrow \left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2 = (\pm 3)^2$$

جذرالمربع لینے سے

$$\frac{x+3}{x-5} = \pm 3$$

$\frac{x+3}{x-5} = 3$	یا	$\frac{x+3}{x-5} = -3$
$x + 3 = 3(x-5)$		$x + 3 = -3(x-5)$
$x + 3 = 3x - 15$		$x + 3 = -3x + 15$
$-2x = -18$		$4x = 12$
$x = 9$		$x = 3$

پس حل سیٹ $\{3, 9\}$ ہے۔

مشق 3.4

-1 اگر $a : b = c : d$ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\frac{4a+5b}{4a-5b} = \frac{4c+5d}{4c-5d}$

(ii) $\frac{2a+9b}{2a-9b} = \frac{2c+9d}{2c-9d}$

(iii) $\frac{ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2} = \frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}$

(iv) $\frac{a^2c+b^2d}{a^2c-b^2d} = \frac{ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2}$

(v) $pa + qb : pa - qb = pc + qd : pc - qd$

(vi) $\dfrac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\dfrac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

(vii) $\dfrac{2a+3b+2c+3d}{2a+3b-2c-3d}=\dfrac{2a-3b+2c-3d}{2a-3b-2c+3d}$

(viii) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{ac+bd}{ac-bd}$

-2 مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت استعمال کرتے ہوئے

(i) $\dfrac{x+2y}{x-2y}+\dfrac{x+2z}{x-2z}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x=\dfrac{4yz}{y+z}$ ہو۔

(ii) $\dfrac{m+5n}{m-5n}+\dfrac{m+5p}{m-5p}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $m=\dfrac{10np}{n+p}$ ہو۔

(iii) $\dfrac{x-6a}{x+6a}-\dfrac{x+6b}{x-6b}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x=\dfrac{12ab}{a-b}$ ہو۔

(iv) $\dfrac{x-3y}{x+3y}-\dfrac{x+3z}{x-3z}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x=\dfrac{3yz}{y-z}$ ہو۔

(v) $\dfrac{s-3p}{s+3p}+\dfrac{s+3q}{s-3q}$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر $s=\dfrac{6pq}{p-q}$ ہو۔

(vi) $\dfrac{(x-2)^2-(x-4)^2}{(x-2)^2+(x-4)^2}=\dfrac{12}{13}$ کو حل کریں۔

(vii) $\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}}=2$ کو حل کریں۔

(viii) $\dfrac{\sqrt{x^2+8p^2}-\sqrt{x^2-p^2}}{\sqrt{x^2+8p^2}+\sqrt{x^2-p^2}}=\dfrac{1}{3}$ کو حل کریں۔

(ix) $\dfrac{(x+5)^3-(x-3)^3}{(x+5)^3+(x-3)^3}=\dfrac{13}{14}$ کو حل کریں۔

3.3(i) مشترک تغیر (Joint variation)

ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات میں راست اور معکوس تغیروں کے ملنے سے **مشترک تغیر** بنتا ہے۔

اگر ایک متغیر y کا x کے ساتھ تغیر راست اور z کے ساتھ تغیر معکوس ہو تو $y \propto x$ اور $y \propto \dfrac{1}{z}$

مشترک تغیر میں، ہم اس کو اس طرح لکھتے ہیں۔ $y \propto \dfrac{x}{z}$

یعنی $y = k\dfrac{x}{z}$

جبکہ $k \neq 0$ تغیر کا مستقل ہے۔

مثلاً نیوٹن کے قانون کششِ ثقل کے مطابق، اگر ایک جسم سے دوسرے پر لگائی جانے والی قوت G، جو کہ اجسام کی کمیتوں m_1, m_2 کے حاصل ضرب میں تغیر راست اور ان کے درمیانی فاصلہ d کے مربع میں تغیر معکوس ہو۔

تو $\quad G \propto \dfrac{m_1 m_2}{d^2}$

یا $\quad$ (جبکہ $k \neq 0$ مستقل ہے) $\quad G = k\dfrac{m_1\, m_2}{d^2}$

3.3(ii) مشترک تغیر کے متعلق سوالات (Problems related to joint variation)

مشترک تغیر سے متعلق سوالات کو حل کرنے کے طریقے کی وضاحت مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: اگر y، x^2 اور z میں مشترک تغیر اور $y = 6$ جب $x = 6$، $z = 9$ ہو۔ y کو بطور x اور z کا تفاعل لکھیے اور y کی قیمت معلوم کیجیے جب $x = -8$ اور $z = 12$ ہو۔

حل: چونکہ y کا x^2 اور z میں مشترک تغیر ہے، اس لیے

$$y \propto x^2 z$$

یعنی $\quad y = kx^2 z \quad$ (i)

مساوات (i) میں $\quad y = 6, x = 4, z = 9 \quad$ درج کرنے سے

$$6 = k\,(4)^2\,(9)$$

$$\frac{6}{16 \times 9} = k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{24}$$

$$y = \frac{1}{24}x^2\,z \qquad \text{(ii)}$$

اب مساوات (ii) میں $\quad x = -8, z = 12 \quad$ درج کرنے سے

$$y = \frac{1}{24}(-8)^2\,(12) = 32$$

مثال 2: p کا q اور r^2 میں تغیر راست ہے اور s اور t^2 میں تغیر معکوس ہے۔ $p = 40$ جب $q = 8,\ r = 5,\ s = 3,\ t = 2$، p کو بصورت q، r، s اور t معلوم کیجیے نیز p کی قیمت معلوم کیجیے جب $q = -2,\ r = 4,\ s = 3$ اور $t = -1$ ہو۔

حل: دی ہوئی شرط کے مطابق

$$p \propto \frac{qr^2}{st^2}$$

$$p = k\frac{qr^2}{st^2} \qquad \text{(i)}$$

$p = 40$، $q = 8$، $r = 5$، $s = 3$ اور $t = 2$ مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$40 = k \frac{(8)(5)^2}{3(2)^2}$$

$$\frac{40 \times 3 \times 4}{8 \times 25} = k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{12}{5}$$

تو $k = \frac{r}{2}$ رکھنے سے مساوات (i) ہو جاتی ہے۔

$$p = \frac{12}{5} \; \frac{qr^2}{st^2}$$

اب $q = -2$، $r = 4$، $s = 3$ اور $t = -1$ اوپر دی ہوئی مساوات میں درج کرنے سے

$$p = \frac{12}{5} \; \frac{(-2)(4)^2}{(3)(-1)^2} = -\frac{128}{5}$$

مشق 3.5

1- اگر s کا u^2 سے تغیر راست اور v سے تغیر معکوس اور $s = 7$ جب $u = 3$، $v = 2$ ہو۔
s کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $u = 6$ اور $v = 10$ ہو۔

2- اگر w کا x، y^2 اور z میں تغیر مشترک ہو اور $w = 5$ جب $x = 2$، $y = 3$، $z = 10$ ہو۔
w معلوم کیجیے جبکہ $x = 4$، $y = 7$ اور $z = 3$ ہو۔

3- اگر y کا x^3 سے تغیر راست اور z^2، t میں تغیر معکوس ہو اور $y = 16$ جب $x = 4$، $z = 2$، $t = 3$۔ y کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x = 2$، $z = 3$ اور $t = 4$ ہو۔

4- اگر u کا x^2 سے تغیر راست اور حاصل ضرب yz^3 سے تغیر معکوس ہو اور $u = 2$ جب $x = 8$، $y = 7$، $z = 2$ ہو۔ $x = 6$، $y = 3$، $z = 2$ ہو تو u کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x = 6$، $y = 3$، $z = 2$ ہو۔

5- اگر v کا حاصل ضرب xy^3 سے تغیر راست اور z^2 سے تغیر معکوس ہو اور $v = 27$ جب $x = 7$، $y = 6$، $z = 7$ ہو۔
v کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x = 6$، $y = 2$، $z = 3$ ہو۔

6- اگر w کا u کے مکعب سے تغیر معکوس ہو اور $w = 5$ جبکہ $u = 3$ ہو۔ w معلوم کیجیے جب $u = 6$ ہو۔

3.4 K-طریقہ (K-Method)

(i) 3.4 k-طریقہ کے استعمال سے تناسب پر مشتمل مشروط مساواتوں کو ثابت کرنا۔

اگر $a : b :: c : d$ ایک تناسب ہو تو ہر نسبت k کے برابر اس طرح رکھنے سے

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$$\frac{a}{b}=k \text{ اور } \frac{c}{d}=k \quad \Rightarrow a=bk \quad \text{اور} \quad c=dk$$

اوپر دی گئی مساواتوں کے استعمال سے ہم تناسب سے متعلق بعض سوالات کو زیادہ آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔

یہ طریقہ k-طریقہ کہلاتا ہے۔ ہم k- طریقہ کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $a:b=c:d$ تو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{3a+2b}{3a-2b}=\dfrac{3c+2d}{3c-2d}$

حل:

$$a:b=c:d$$

فرض کریں کہ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$

تب $a=bk$ اور $c=dk$

ثابت کرنے کے لیے $\dfrac{3a+2b}{3a-2b}=\dfrac{3c+2d}{3c-2d}$

اب

$$\text{L.H.S}=\frac{3a+2b}{3a-2b}=\frac{3kb+2b}{3kb-2b}=\frac{b(3k+2)}{b(3k-2)}$$

$$=\frac{3k+2}{3k-2} \qquad \text{(i)}$$

نیز

$$\text{R.H.S}=\frac{3c+2d}{3c-2d}=\frac{3kd+2d}{3kd-2d}=\frac{d(3k+2)}{d(3k-2)}$$

$$=\frac{3k+2}{3k-2} \qquad \text{(ii)}$$

اس لیے $\text{L.H.S}=\text{R.H.S}$

یعنی $\dfrac{3a+2b}{3a-2b}=\dfrac{3c+2d}{3c-2d}$

مثال 2: اگر $a:b=c:d$ تو ثابت کیجیے کہ $pa+qb:ma-nb=pc+qd:mc-nd$

حل: فرض کریں کہ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$

تب $a=bk$ اور $c=dk$

$$\text{L.H.S}=pa+qb:ma-nb=\frac{pa+qb}{ma-nb}=\frac{pkb+qb}{mkb-nb}$$

$$=\frac{b(pk+q)}{b(mk-n)}=\frac{pk+q}{mk-n}$$

$$\text{R.H.S} = pc + qd : mc - nd = \frac{pc + qd}{mc - nd} = \frac{pkd + qd}{mkd - nd} \qquad (c = kd)$$

$$= \frac{d(pk + q)}{d(mk - n)} = \frac{pk + q}{mk - n}$$

یعنی $pa + qb : ma - nb = pc + qd : mc - nd$

مثال 3: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{ace}{bdf}$

حل: فرض کریں کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

تب $\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{d} = k$ اور $\frac{e}{f} = k$

یعنی $a = bk$, $c = dk$ اور $e = fk$

ثابت کرنے کے لیے $\frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{ace}{bdf}$

اب
$$\text{L.H.S} = \frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{(bk)^3 + (dk)^3 + (fk)^3}{b^3 + d^3 + f^3}$$

$$= \frac{b^3k^3 + d^3k^3 + f^3k^3}{b^3 + d^3 + f^3} = k^3\left(\frac{b^3 + d^3 + f^3}{b^3 + d^3 + f^3}\right) = k^3$$

نیز
$$\text{R.H.S} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(bk)\,(dk)\,(fk)}{bdf} = k^3\,\frac{bdf}{bdf} = k^3$$

اس لیے $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

یعنی $\frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3} = \frac{ace}{bdf}$

مثال 4: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$

حل: فرض کریں کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$a = bk,\ c = dk,\ e = fk$

ثابت کرنے کے لیے $\frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2}$$

$$= \frac{(bk)^2b + (dk)^2d + (fk)^2f}{(bk)b^2 + (dk)d^2 + (fk)f^2} = \frac{k^2b^3 + k^2d^3 + k^2f^3}{kb^3 + kd^3 + kf^3}$$

$$= \frac{k^2(b^3 + d^3 + f^3)}{k(b^3 + d^3 + f^3)} = k$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{bk + dk + fk}{b + d + f}$$

$$= \frac{k(b + d + f)}{b + d + f} = k$$

L.H.S. = R.H.S.

پس

$$\frac{a^2b + c^2d + e^2f}{ab^2 + cd^2 + ef^2} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$$

مشق 3.6

-1 اگر $a : b = c : d$ $(a, b, c, d \neq 0)$ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\dfrac{4a - 9b}{4a + 9b} = \dfrac{4c - 9d}{4c + 9d}$ (ii) $\dfrac{6a - 5b}{6a + 5b} = \dfrac{6c - 5d}{6c + 5d}$

(iii) $\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}}$ (iv) $a^6 + c^6 : b^6 + d^6 = a^3c^3 : b^3d^3$

(v) $p(a + b) + qb : p(c + d) + qd = a : c$

(vi) $a^2 + b^2 : \dfrac{a^3}{a + b} = c^2 + d^2 : \dfrac{c^3}{c + d}$

(vii) $\dfrac{a}{a - b} : \dfrac{a + b}{b} = \dfrac{c}{c - d} : \dfrac{c + d}{d}$

-2 اگر $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ $(a, b, c, d, e, f \neq 0)$ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2 + e^2}{b^2 + d^2 + f^2}}$ (ii) $\dfrac{ac + ce + ea}{bd + df + fb} = \left[\dfrac{ace}{bdf}\right]^{2/3}$

(iii) $\dfrac{ac}{bd} + \dfrac{ce}{df} + \dfrac{ea}{fb} = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{c^2}{d^2} + \dfrac{e^2}{f^2}$

3.4(ii) تغیر پر مشتمل روز مرہ زندگی کے سوالات

مثال 1: ایک مستطیلی شہتیر کی طاقت "s" کا اس کی چوڑائی b اور گہرائی d کے مربع میں تغیر راست ہے۔ اگر ایک شہتیر 9 سم چوڑا اور 12 سم گہرا 1200 پونڈ وزن اٹھاتا ہو تو 12 سم چوڑا اور 9 سم گہرا شہتیر کتنا وزن اٹھائے گا؟

حل: مشترک تغیر سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\quad s \propto bd^2$

یعنی $\quad s = kbd^2 \quad$ (i)

مساوات (i) میں $s = 1200$، $b = 9$ اور $d = 12$ درج کرنے سے

$$k(9)\,(12)^2 = 1200$$

$$k = \frac{1200}{9 \times 144} = \frac{25}{27}$$

مساوات (i) میں $k = \frac{25}{27}$ درج کرنے سے $\quad s = \frac{25}{27}bd^2$

اب اوپر دی ہوئی مساوات میں $b = 12$ اور $d = 9$ درج کرنے سے

$$s = \frac{25}{27}(12)\,(9)^2 = \frac{25(12)\,(9)\,(9)}{27} = 900$$

پس s، 900 پونڈ ہے۔

مثال 2: ایک تار میں برقی رو کا برقی قوت محرکہ E میں تغیر راست اور مزاحمت R میں تغیر معکوس ہے۔ اگر ایمپیئر $I = 32$، جبکہ وولٹز $E = 128$ اور اومز $R = 80$ جب وولٹز $E = 150$ اور اومز $R = 180$ ہو تو I معلوم کیجیے۔

حل: مشترک تغیر سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\quad I \propto \frac{E}{R}$

یعنی $\quad I = \frac{kE}{R} \quad$ (i)

مساوات (i) میں $I = 32$، $E = 128$ اور $R = 8$ درج کرنے سے

$$32 = \frac{k(128)}{8} \Rightarrow \frac{32 \times 8}{128} = k \Rightarrow k = 2$$

مساوات (i) میں $k = 2$ درج کرنے سے $\quad I = \frac{2E}{R}$

اب اوپر دی ہوئی مساوات میں $E = 150$ اور $R = 18$ درج کرنے سے

$$I = \frac{2(150)}{18} = \frac{50}{3}$$

پس I، $\frac{50}{3}$ ایمپیئرز ہے۔

مشق 3.7

-1 ایک مکعب کے سطحی رقبہ A کا اس کے ایک کنارہ کی لمبائی l کے مربع میں تغیر راست ہے۔
اور 27 مربع یونٹس $= A$ جبکہ 3 یونٹس $= l$ ہو تو معلوم کیجیے۔

(i) A جب 4 یونٹس $= l$

(ii) l جب 12 مربع یونٹس $= A$

-2 ایک کرّہ کے سطحی رقبہ S کا اس کے رداس r کے مربع میں تغیر راست ہے اور $S = 16\pi$ جب $r = 2$ ہو۔ r معلوم کیجیے جب $S = 36\pi$ ہو۔

-3 ہکس کے قانون میں ایک سپرنگ کو کھینچنے والی قوت F کا اس کے کھچاؤ کی مقدار S سے تغیر راست ہے اور 32 پونڈ $= F$ جب 1.6 انچ $= S$ معلوم کیجیے۔

(i) S جب 50 پونڈ $= F$ (ii) F جب 0.8 انچ $= S$

-4 کسی دیے ہوئے منبع سے روشنی کی شدت I کا اس سے فاصلے d کے مربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر روشنی کی شدت منبع سے 12 فٹ کے فاصلے پر 20 کینڈل پاور ہو تو منبع سے 8 فٹ کے فاصلہ پر روشنی کی شدت معلوم کیجیے۔

-5 ایک جسم میں مائع کے دباؤ P کا اس کی گہرائی d میں تغیر راست ہے۔ اگر 5 فٹ بلندی والے مائع کے ایک حصّہ کا تالاب کی تہہ پر دباؤ 2.25 پونڈ فی مربع انچ ہو تو 9 پونڈ فی مربع انچ دباؤ لگانے کے لیے مائع کی گہرائی کتنی ہونی چاہیے؟

-6 مزدوری خرچہ c کا مزدوروں کی تعداد n اور دنوں کی تعداد d میں تغیر مشترک ہے اگر 800 مزدوروں کا 13 دن کا خرچ 286000 روپے ہو تو 600 مزدوروں کا 18 دن کا خرچہ کیا ہوگا؟

-7 ایک ستون کے بوجھ c کا اس کے قطر d کی چوتھی قوت میں تغیر راست اور اس کی لمبائی l کے مربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر 63 ٹن بوجھ، 16 انچ ستون کو 30 فٹ تک برداشت کر سکتا ہے تو 28 ٹن کا بوجھ برداشت کرنے والا 4 انچ کا ستون کتنا بلند ہوگا؟

-8 ایک لفٹ کے بوجھ اٹھانے کے لئے مخصوص وقت T کا وزن w گہرائی d کے ساتھ تغیر راست اور موٹر کی قوت p کے ساتھ تغیر معکوس ہے۔ اگر وزن 500 پونڈ، 40 فٹ تک اٹھانے کے لیے 4 ہارس پاور موٹر کو 25 سیکنڈ کی ضرورت ہو تو 40 سیکنڈ میں 800 پونڈ وزن کو 120 فٹ تک اٹھانے کے لیے کتنی قوت درکار ہوگی؟

-9 ایک جسم کی حرکی توانائی (K.E) کا جسم کی کمیت "m" اور اس کی رفتار "v" کے مربع میں تغیر مشترک ہے۔ اگر 45 پونڈ کمیت اور 24 فٹ فی سیکنڈ والے جسم کی حرکی توانائی 4320 فٹ فی پونڈ ہو تو 44 فٹ فی سیکنڈ سے سفر کرنے والی 3000 پونڈ وزن کی گاڑی کی حرکی توانائی معلوم کیجیے۔

متفرق مشق 3

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) نسبت $a:b$ میں a کہلاتا ہے۔

(a) تعلق (b) پہلی رقم (c) دوسری رقم (d) کوئی نہیں

(ii) نسبت $x:y$ میں y کہلاتا ہے۔

(a) تعلق (b) پہلی رقم (c) دوسری رقم (d) کوئی نہیں

(iii) تناسب $a:b::c:d$ میں a اور d کہلاتے ہیں۔

(a) وسطین (b) طرفین (c) چوتھا تناسب (d) کوئی نہیں

(iv) تناسب $a:b::c:d$ میں b اور c کہلاتے ہیں۔

(a) وسطین (b) طرفین (c) چوتھا تناسب (d) کوئی نہیں

(v) مسلسل تناسب $a:b=b:c$، $ac=b^2$ میں a اور c کے درمیان b ________ تناسب کہلاتا ہے۔

(a) تیسرا (b) چوتھا (c) وسط (d) کوئی نہیں

(vi) مسلسل تناسب $a:b=b:c$ میں a اور b سے c ________ تناسب کہلاتا ہے۔

(a) تیسرا (b) چوتھا (c) وسط (d) کوئی نہیں

(vii) تناسب $4:x::5:15$ میں x معلوم کیجیے۔

(a) $\frac{75}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 12

(viii) اگر $u \propto v^2$ تو

(a) $u=v^2$ (b) $u=kv^2$ (c) $uv^2=k$ (d) $uv^2=1$

(ix) اگر $y^2 \propto \frac{1}{x^3}$ تو

(a) $y^2=\frac{k}{x^3}$ (b) $y^2=\frac{1}{x^3}$ (c) $y^2=x^2$ (d) $y^2=kx^3$

(x) اگر $\frac{u}{v}=\frac{v}{w}=k$ تو

(a) $u=wk^2$ (b) $u=vk^2$ (c) $u=w^2k$ (d) $u=v^2k$

(xi) x^2 اور y^2 کا تیسرا تناسب ہے۔

(a) $\frac{y^2}{x^2}$ (b) x^2y^2 (c) $\frac{y^4}{x^2}$ (d) $\frac{y^2}{x^4}$

(xii) $x : y :: v : w$ میں چوتھا تناسب w ہے۔

(a) $\frac{xy}{v}$ (b) $\frac{vy}{x}$ (c) xyv (d) $\frac{x}{vy}$

(xiii) اگر $a : b = x : y$ ہو تو ابدال نسبت ہے۔

(a) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ (b) $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

(c) $\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$ (d) $\frac{a-b}{x} = \frac{x-y}{y}$

(xiv) اگر $a : b = x : y$ ہو تو عکس نسبت ہے۔

(a) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ (b) $\frac{a}{a-b} = \frac{x}{x-y}$

(c) $\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$ (d) $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$

(xv) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو ترکیب نسبت ہے۔

(a) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ (b) $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

(c) $\frac{ad}{bc}$ (d) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) نسبت کی تعریف کیجیے اور ایک مثال دیجیے۔ (ii) تناسب کی تعریف کیجیے۔

(iii) تغیر راست کی تعریف کیجیے۔ (iv) تغیر معکوس کی تعریف کیجیے۔

(v) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت بیان کیجیے۔ (vi) اگر $6 : x :: 3 : 5$ تو x معلوم کیجیے۔

(vii) اگر x اور y^2 میں تغیر معکوس ہو اور $x = 27$ جب $y = 4$، y کی قیمت معلوم کیجیے جب $x = 3$ ہو۔

(viii) اگر u اور v میں تغیر معکوس ہو اور $u = 8$ جب $v = 3$، v کی قیمت معلوم کیجیے۔ جب $u = 12$ ہو۔

(ix) 8, 7, 6 کا چوتھا تناسب معلوم کیجیے۔ (x) 16 اور 49 کا وسطِ فی التناسب معلوم کیجیے۔

(xi) 28،4 کا تیسرا تناسب معلوم کیجیے۔

(xii) اگر $y \propto \frac{x^2}{z}$ اور $y = 28$ جب $x = 7, z = 2$ ہو تو y معلوم کیجیے۔

(xiii) اگر $z \propto xy$ اور $z = 36$ جب $x = 2, y = 3,$ ہو تو z معلوم کیجیے۔

(xiv) اگر $w \propto \frac{1}{v^2}$ اور $w = 2$ جب $v = 3$ ہو تو w معلوم کیجیے۔

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) نسبت $\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{x^3-y^3}$ آسان ترین شکل میں __________ ہے۔

(ii) نسبت $x : y$ میں x کو __________ کہتے ہیں۔

(iii) نسبت $a : b$ میں b کو __________ کہتے ہیں۔

(iv) تناسب $a : b :: x : y$ میں a اور y کو __________ کہتے ہیں۔

(v) تناسب $p : q :: m : n$ میں q اور m کو __________ کہتے ہیں۔

(vi) تناسب $8 : 4 :: p : 7$ میں $p =$ __________

(vii) اگر $12 : 9 :: m : 6$ تو $m =$ __________

(viii) اگر x اور y میں تغیر راست ہو تو $x =$ __________

(ix) اگر u^3 اور v میں تغیر راست ہو تو $u^3 =$ __________

(x) اگر w اور p^2 میں تغیر معکوس ہو تو $k =$ __________

(xi) 4، 12 کا تیسرا تناسب __________ ہے۔

(xii) 5، 6، 15 کا چوتھا تناسب __________ ہے۔

(xiii) $4m^2n^4$ اور p^6 کا وسطی التناسب __________ ہے۔

(xiv) 4، m، 9 کا مسلسل تناسب __________ ہے۔

خلاصہ

- دو ہم قسم مقداروں کے درمیان تعلق **نسبت** کہلاتا ہے۔
- تناسب بیان کردہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرتا ہے۔
- اگر دو نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ برابر ہوں۔ تو ہم ان کو $a : b = c : d$ لکھ سکتے ہیں۔
- اگر دو مقداروں کے درمیان تعلق اس طرح کا ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے) سے دوسری مقدار اسی نسبت سے بڑھے (کم ہو) تو ایسے تغیر کو **تغیر راست** کہتے ہیں۔

- اگر دو مقداروں کے درمیان جس میں ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے سے) اور دوسری مقدار اسی نسبت سے کم ہو (بڑھے) تو ایسا تعلق **تغیر معکوس** کہلاتا ہے۔
- تناسب کے مسئلے:

(1) **مسئلہ عکس نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو $b : a = d : c$

(2) **مسئلہ ابدال نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو $a : c = b : d$

(3) **مسئلہ ترکیب نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a + b : b = c + d : d$

اور (ii) $a : a + b = c : c + d$

(4) **مسئلہ تفصیل نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a - b : b = c - d : d$

اور (ii) $a : a - b = c : c - d$

(5) **مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت:**

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

$a + b : a - b = c + d : c - d$

- ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات میں راست اور معکوس تغیروں کے ملنے سے **مشترک تغیر** بنتا ہے۔
- **K-طریقہ**

(a) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ یا $a = bk$ اور $c = dk$

(b) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ ہو تو $a = bk$, $c = dk$ اور $c = fk$

یونٹ 4

جزوی کسریں
(PARTIAL FRACTIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- واجب کسر، غیر واجب کسر اور ناطق کسر کی تعریف کرنا۔
- ایک الجبری کسر کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنا جب الجبری کسر کا نسب نما مشتمل ہو:
  - غیر مکرر یک درجی اجزائے ضربی پر
  - مکرر یک درجی جزو ضربی پر
  - غیر مکرر دو درجی جزو ضربی پر
  - مکرر دو درجی جزو ضربی پر

4.1 کسر (Fraction)

دو اعداد یا دو الجبری جملوں کی نسبت کو کسر کہتے ہیں نسبت کو بار (—) سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم مقسوم علیہ (Dividend) کو بار کے اوپر اور تقسیم کنندہ (Divisor) کو بار کے نیچے لکھتے ہیں۔ مثال کے طور پر، $\frac{x^2+2}{x-2}$ ایک کسر ہے جبکہ $x-2 \neq 0$ اور اگر $x-2=0$ ہو تو ہم کسر $\frac{x^2+2}{x-2}$ کی تعریف نہیں کر سکتے کیونکہ $x-2=0$ ہو تو $x=2$ دی گئی کسر کے نسب نما (Denominator) کو صفر (Zero) کر دیتا ہے۔

4.1.1 ناطق کسر (Rational Fraction)

$\frac{N(x)}{D(x)}$ قسم کا جملہ ناطق کسر کہلاتا ہے جبکہ $N(x)$ اور $D(x)$ متغیر x میں حقیقی عددی سروں کے ساتھ کثیر رقمیاں ہوں۔ جملے میں کثیر رقمی $D(x) \neq 0$۔ مثال کے طور پر $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x+2)}$ اور $\frac{2x}{(x-1)(x+2)}$ ناطق کسریں ہیں۔

4.1.2 واجب کسر (Proper Fraction)

اگر کسی ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ میں $N(x)$ اور $D(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہوں اور کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ کثیر رقمی $D(x)$ سے کم ہو، جبکہ $D(x) \neq 0$ ہو تو ایسی کسر واجب کسر کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر، $\frac{2}{x+1}$، $\frac{2x-3}{x^2+4}$ اور $\frac{3x^2}{x^3+1}$ واجب کسور ہیں۔

4.1.3 غیر واجب کسر (Improper Fraction)

اگر کسی ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ کثیر رقمی $D(x)$ کے درجے کے برابر ہو یا زیادہ ہو تو ایسی کسر کو غیر واجب کسر کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر، $\frac{5x}{x+2}$، $\frac{3x^2+2}{x^2+7x+12}$ اور $\frac{6x^4}{x^3+1}$ غیر واجب کسور ہیں۔

کسی بھی غیر واجب کسر کو تقسیم کے عمل کے ذریعے ایک کثیر رقمی اور ایک واجب کسر کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے بڑا ہو یا برابر ہو تو ہم $N(x)$ کو $D(x)$ سے تقسیم کر کے حاصل قسمت کثیر رقمی $Q(x)$ اور ایک باقی کثیر رقمی $R(x)$ حاصل کر سکتے ہیں جبکہ $R(x)$ کا درجہ $D(x)$ کے درجہ سے کم ہوتا ہے۔

پس $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x) \neq 0$ ، $Q(x)$ حاصلِ قسمت کثیر رقمی اور $\frac{R(x)}{D(x)}$ واجب کسر ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{x^2+1}{x+1}$ ایک غیر واجب کسر ہے۔

اس لیے $$\frac{x^2+1}{x+1} = (x-1) + \frac{2}{x+1}$$

یہاں غیر واجب کسر $\frac{x^2+1}{x+1}$ کو ایک حاصل قسمت کثیر رقمی $Q(x) = x - 1$ اور ایک واجب کسر $\frac{2}{x+1}$ میں تحلیل کیا گیا ہے۔

مثال 1: $\frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2+5}$ کو واجب کسر میں تبدیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ $N(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ اور $D(x) = x^2 + 5$

بذریعہ تقسیم

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 1 \\ x^2 + 5 & \; x^3 - x^2 + x + 1 \\ & \underline{-x^3 \quad\quad \pm 5x} \\ & \quad -x^2 - 4x + 1 \\ & \quad \underline{\mp x^2 \quad\quad \mp 5} \\ & \quad\quad -4x + 6 \end{array}$$

لہٰذا $$\frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2+5} = (x-1) + \frac{-4x+6}{x^2+5}$$

سرگرمی: واجب اور غیر واجب کسروں کو علیحدہ علیحدہ کریں۔

(i) $\frac{x^2+x+1}{x^2+2}$ (ii) $\frac{2x+5}{(x+1)(x+2)}$ (iii) $\frac{x^3+x^2+1}{x^3-1}$ (iv) $\frac{2x}{(x-1)(x-2)}$

سرگرمی: مندرجہ ذیل غیر واجب کسروں کو واجب کسروں میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x+1}$ (ii) $\frac{6x^3+5x^2-6}{2x^2-x-1}$

4.2 کسر کی جزوی کسور میں تحلیل

Resolution of Fraction into Partial Fractions

ذیل میں تین کسریں دی گئی ہیں جن کے شروع میں جمع یا تفریق کا نشان ہے۔ ہم آسانی سے ان تینوں کسروں کو جمع کر کے ایک کسر بنا سکتے ہیں۔

پس $$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x} = \frac{x(x+1) - 2x(x-1) + 4(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x + 4x^2 - 4}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2+3x-4}{x(x-1)(x+1)}$$

دی ہوئی کسروں کی مختصر ترین شکل میں کسر $\frac{3x^2+3x-4}{x(x-1)(x+1)}$، حاصل کسر کہلاتی ہے۔ دی گئی کسور

$\frac{1}{x-1}$ ، $\frac{2}{x+1}$ – اور $\frac{4}{x}$ کسر $\frac{3x^2+3x-4}{x(x-1)(x+1)}$ کے اجزا ہیں۔ ان کسور کو جزوی کسور کہتے ہیں۔ اس یونٹ میں ہم دی ہوئی حاصل کسر کی جزوی کسریں معلوم کریں گے۔ ہر واجب کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ ، $D(x) \neq 0$ کو ہم الجبری کسروں کے مجموعے میں مندرجہ ذیل طریقے سے تحلیل کر سکتے ہیں۔

4.2.1 الجبری کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنا جب $D(x)$ غیر مکرر یک درجی اجزائے ضربی پر مشتمل ہو۔

پہلا طریقہ (Rule I) اگر یک درجی جز و ضربی $(ax+b)$، $D(x)$ کا جز و ضربی ہو تو جزوی کسر $\frac{A}{ax+b}$ کی شکل میں ہو گی جب کہ مستقل مقدار A معلوم کرنا ہوتی ہے۔

$\frac{N(x)}{D(x)}$ میں کثیر رقمی $D(x)$ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$D(x) = (a_1x+b_1)\,(a_2x+b_2)\,.....\,(a_nx+b_n)$$

یہاں تمام اجزائے ضربی ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔

پس
$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + ... + \frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

یہاں مستقل مقداریں A_1، A_2، ..... A_n معلوم کرنا ہوتی ہیں۔ دی ہوئی مثال سے واضح ہوتا ہے کہ ہم کس طرح ان مقداروں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 1: $\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)}$ کو جزوی کسروں میں تبدیل (تحلیل) کریں۔

حل: فرض کریں کہ (i)
$$\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

دونوں طرف $(x-4)\,(x+2)$ سے ضرب دینے سے

$$5x+4 = A\,(x+2) + B\,(x-4) \qquad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) ایک کلیہ (مماثلت) ہے جو کہ x کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے لہٰذا $x = 4$ اور $x = -2$ کے لیے بھی درست ہے۔

مساوات (ii) میں $x - 4 = 0$ یا $x = 4$ رکھنے سے (A کے متناظرہ جز و ضربی)

$$5(4) + 4 = A\,(4+2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 4}$$

مساوات (ii) میں $x + 2 = 0$ یا $x = -2$ رکھنے سے (B کے متناظرہ جز و ضربی)

$$5(-2) + 4 = B(-2-4) \quad \Rightarrow \quad -6B = -6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 1}$$

پس $\frac{1}{x+2}$ ، $\frac{4}{x-4}$ مطلوبہ جزوی کسریں ہیں۔

لہٰذا $$\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+2}$$

یہ طریقہ "زیرو کا طریقہ" کہلاتا ہے۔ یہ طریقہ اس وقت کارگر ثابت ہوتا ہے جب مخرج $D(x)$ میں یک درجی اجزائے ضربی ہوں۔

مماثلت (Identity)

مماثلت ایک ایسی مساوات ہوتی ہے جو مساوات میں موجود متغیر کی ہر قیمت کے لیے درست ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر $2(x+1) = 2x+2$ اور $\frac{2x^2}{2} = x^2$ مماثلتیں ہیں کیونکہ یہ مساواتیں x کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہیں۔

مثال 2: $\frac{1}{3+x-2x^2}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: $\frac{1}{3+x-2x^2}$ کو ہم آسانی کے لیے $\frac{-1}{2x^2-x-3}$ لکھ سکتے ہیں۔

یہاں مخرج $$D(x) = 2x^2 - x - 3 = 2x^2 - 3x + 2x - 3$$
$$= x(2x-3) + 1(2x-3) = (x+1)(2x-3)$$

فرض کریں کہ $$\frac{-1}{2x^2-x-3} = \frac{-1}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3}$$

دونوں طرف $(x+1)(2x-3)$ سے ضرب دینے سے $-1 = A(2x-3) + B(x+1)$

مساوات کے طرفین میں موجود x کے عددی سروں اور مستقل مقداروں کو برابر رکھنے سے، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$2A + B = 0 \quad \text{(i)} \qquad \text{اور} \qquad -3A + B = -1 \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) کو حل کرنے سے $A = \frac{1}{5}$ اور $B = \frac{-2}{5}$ حاصل ہوتے ہیں۔

پس $$\frac{1}{3+x-2x^2} = \frac{1}{5(x+1)} - \frac{2}{5(2x-3)}$$

نوٹ: $\frac{N(x)}{D(x)}$ شکل کی تمام ناطق کسروں کو تحلیل کرنے کا عام طریقہ درجِ ذیل ہے۔

(i) شمار کنندہ $N(x)$ کا درجہ نسب نما $D(x)$ کے درجہ سے کم ہونا چاہیے۔

(ii) اگر $N(x)$ کی ڈگری (درجہ) $D(x)$ کی ڈگری سے زیادہ ہو تو تقسیم کا عمل کیا جاتا ہے اور باقی بچنے والی کسر کو جزوی کسور میں لکھ سکتے ہیں۔

(iii) مستقل مقداروں A، B، C وغیرہ کا مناسب استعمال کریں۔

(iv) دونوں اطراف کو ذواضعاف اقل سے ضرب دیں۔

(v) دونوں طرف رقموں کو ترتیب نزولی میں لکھیں۔

(vi) دونوں طرف x کی ایک جیسی طاقتوں کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے مستقل مقداروں کی تعداد کے برابر مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(vii) ان مساواتوں کو حل کرنے سے ہم مستقل مقداروں کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

مشق 4.1

جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

1. $\dfrac{7x-9}{(x+1)(x-3)}$ 2. $\dfrac{x-11}{(x-4)(x+3)}$ 3. $\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

4. $\dfrac{x-5}{x^2+2x-3}$ 5. $\dfrac{3x+3}{(x-1)(x+2)}$ 6. $\dfrac{7x-25}{(x-4)(x-3)}$

7. $\dfrac{x^2+2x+1}{(x-2)(x+3)}$ 8. $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$

4.2.2 کسر کی تحلیل جب $D(x)$ مکرر یک درجی جزوضربی پر مشتمل ہو

دوسرا طریقہ (Rule II)

اگر کوئی یک درجی جزوضربی $(ax+b)$، $D(x)$ کی n مرتبہ جزوضربی ہو تو n جزوی کسور اس شکل میں ہونگی۔

$$\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

یہاں $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مستقل مقداریں ہیں اور $n\geq 2$ مثبت صحیح عدد ہے۔

اس لیے
$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

مستقل مقداروں کو معلوم کرنے اور کسر کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے کا طریقہ کار درجِ ذیل مثال میں واضح کیا گیا ہے۔

مثال: $\dfrac{1}{(x-1)^2\,(x-2)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ
$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}$$

طرفین کو $(x-1)^2\,(x-2)$ سے ضرب دینے سے

$$1=A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2$$
$$\Rightarrow\quad A(x^2-3x+2)+B(x-2)+C(x^2-2x+1)=1 \qquad \text{(i)}$$

چونکہ (i) ایک ایسی مساوات ہے جو متغیر x کی ہر قیمت کے لیے درست ہے۔

(i) میں $x - 1 = 0$ یا $x = 1$ درج کرنے سے

$$B(1-2) = 1 \Rightarrow -B = 1 \text{ یا } B = -1$$

(i) میں $x - 2 = 0$ یا $x = 2$ رکھنے سے

$$C(2-1)^2 = 1 \Rightarrow C = 1$$

(i) میں دونوں اطراف میں موجود x^2 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے

$$A + C = 0 \Rightarrow A = -C \Rightarrow A = -1$$

$\frac{1}{(x-2)}$ ، $\frac{1}{x-1^2}$ ، $\frac{-1}{x-1}$ مطلوبہ جزوی کسور ہیں۔

پس $$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

اس مثال سے پتہ چلتا ہے کہ

1- ہم مستقل مقدار کی قیمت معلوم کرنے کے لیے زیروز کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

2- زیروز کا طریقہ استعمال کرنے کے بعد x کی ایک جیسی قوتوں کے عددی سروں کا موازنہ کر سکتے ہیں۔

مشق 4.2

جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

1. $\frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2(x-2)}$
2. $\frac{x^2 + 7x + 11}{(x+2)^2(x+3)}$
3. $\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$
4. $\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)}$
5. $\frac{7x + 4}{(3x+2)(x+1)^2}$
6. $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$
7. $\frac{3x^2 + 15x + 16}{(x+2)^2}$
8. $\frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$

4.2.3 کسر کو تحلیل کرنا جب $D(x)$ غیر مکرر ناقابلِ تحویل جزو ضربی پر مشتمل ہو۔

تیسرا طریقہ (Rule III)

اگر $D(x)$ میں دو درجی جزو ضربی $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$، موجود ہو تو جزوی کسر $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)}$ طرز کی ہو گی جبکہ A اور B مستقل مقداریں ہیں جو کہ معلوم کرنا ہوتی ہیں۔

مثال: $\frac{11x + 3}{(x-3)(x^2+9)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ $\dfrac{11x+3}{(x-3)(x^2+9)} = \dfrac{A}{(x-3)} + \dfrac{Bx+C}{x^2+9}$

طرفین کو $(x-3)(x^2+9)$ سے ضرب دینے سے

$$11x + 3 = A(x^2+9) + (Bx+C)(x-3)$$
$$\Rightarrow \quad 11x + 3 = A(x^2+9) + B(x^2-3x) + C(x-3) \qquad \text{(i)}$$

چونکہ (i) ایک مماثلت ہے۔ اس میں $x = 3$ رکھنے سے

$$33 + 3 = A(9+9) \quad \Rightarrow \quad 18A = 36 \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

(i) میں x^2 اور x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -2$$
$$-3B + C = 11 \quad \Rightarrow \quad -3(-2) + C = 11 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

اس لیے $\dfrac{-2x+5}{x^2+9}$ اور $\dfrac{2}{x-3}$ مطلوبہ جزوی کسور ہیں۔

پس $\dfrac{11x+3}{(x-3)(x^2+9)} = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{-2x+5}{x^2+9}$

مشق 4.3

جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

1. $\dfrac{3x-11}{(x+3)(x^2+1)}$
2. $\dfrac{3x+7}{(x^2+1)(x+3)}$
3. $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$
4. $\dfrac{9x-7}{(x+3)(x^2+1)}$
5. $\dfrac{3x+7}{(x+3)(x^2+4)}$
6. $\dfrac{x^2}{(x+2)(x^2+4)}$
7. $\dfrac{1}{x^3+1}$ $\left[\text{اشارہ}: \dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\right]$
8. $\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

4.2.4 کسر کو تحلیل کرنا جب $D(x)$ مکرر ناقابل تحویل جزو ضربی پر مشتمل ہو۔

چوتھا طریقہ (Rule IV)

اگر $D(x)$ میں دو درجی جزو ضربی $(ax^2+bx+c)^2$ جبکہ $a \neq 0$ موجود ہو تو جزوی کسور کو یوں لکھتے ہیں۔

$\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \dfrac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}$ مستقل مقداروں A، B، C اور D کو عام طریقے سے معلوم کرتے ہیں۔

مثال 1: $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

حل: $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ ایک واجب کسر ہے کیونکہ نسب نما کی ڈگری (درجہ) شمار کنندہ کی ڈگری سے بڑی ہے۔

فرض کریں کہ $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

طرفین کو $(x^2+1)^2$ سے ضرب دینے سے

$$x^3-2x^2-2=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D$$
$$x^3-2x^2-2=A(x^3+x)+B(x^2+1)+Cx+D \qquad \text{(i)}$$

x, x^2, x^3 کے عددی سروں (Coefficients) اور مستقل مقداروں کو برابر رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

x^3 کے عدد سروں کو برابر رکھنے سے $A=1$

x^2 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $B=-2$

x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $A+C=0 \Rightarrow C=-1$

مستقل مقداروں کو برابر کرنے سے $B+D=-2$

$$D=-2-B=-2-(-2)=-2+2=0 \quad \Rightarrow D=0$$

پس $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x-2}{x^2+1}+\dfrac{-x+0}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x-2}{x^2+1}-\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

مثال 2: $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

طرفین کو $(x-1)(x^2+1)^2$ سے ضرب دینے سے

$$2x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1) \qquad \text{(i)}$$

اب ہم زیرو کا طریقہ استعمال کرتے ہیں $x-1=0$ یا $x=1$ رکھنے سے

$$3=A(1+1)^2 \Rightarrow A=\frac{3}{4}$$

مساوات (i) کی رقموں کو ترتیب نزولی میں لکھنے سے

$$2x+1=A(x^4+2x^2+1)+Bx(x^3-x^2+x-1)+C(x^3-x^2+x-1)+D(x^2-x)+E(x-1)$$

یا

$$2x+1=A(x^4+2x^2+1)+B(x^4-x^3+x^2-x)+C(x^3-x^2+x-1)+D(x^2-x)+E(x-1)$$
$$2x+1=(A+B)x4+(-B+C)x^3+(2A+B-C+D)x^2+(-B+C-D+E)x+(A-C-E)$$

طرفین میں x^4, x^3, x^2 اور x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے

x^4 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{-3}{4}$

x^3 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $-B+C=0 \quad \Rightarrow \quad C=\dfrac{-3}{4}$

x^2 کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $2A+B-C+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=\dfrac{-3}{2}$

x کے عددی سروں کو برابر رکھنے سے $\quad -B + C - D + E = 2$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + E = 2 \quad \Rightarrow \quad E = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

مطلوبہ جزوی کسور $\dfrac{\frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}}{(x^2+1)^2}$ ، $\dfrac{\frac{-3}{4}x - \frac{3}{4}}{x^2+1}$ اور $\dfrac{3}{4(x-1)}$ ہیں۔

پس $\quad \dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{3}{4(x-1)} - \dfrac{3(x+1)}{4(x^2+1)} - \dfrac{(3x-1)}{2(x^2+1)^2}$

مشق 4.4

جزوی کسروں میں تحلیل کریں۔

1. $\dfrac{x^3}{(x^2+4)^2}$
2. $\dfrac{x^4+3x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$
3. $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)^2}$
4. $\dfrac{x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}$
5. $\dfrac{x^4}{(x^2+2)^2}$
6. $\dfrac{x^5}{(x^2+1)^2}$

متفرق مشق 4

-1 کثیر الانتخابی سوالات

دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) مماثلت $(5x+4)^2 = 25x^2 + 40x + 16$، x کی ________ کے لیے درست ہے۔

(a) ایک قیمت (b) دو قیمتوں

(c) تمام قیمتوں (d) کسی کے لیے نہیں

(ii) تفاعل $\dfrac{N(x)}{D(x)} = (x)$ قسم کا ________ کہلاتا ہے۔ جبکہ $D(x) \neq 0$ نیز $N(x)$ اور $D(x)$ کثیر رقمیاں ہیں۔

(a) مماثلت (b) مساوات

(c) کسر (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) کسر جس میں شمار کنندہ کا درجہ مخرج کے درجہ سے زیادہ ہو ________ کہلاتی ہے۔

(a) واجب کسر (b) غیر واجب کسر

(c) مساوات (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iv) کسر جس شمار کنندہ کی ڈگری مخرج کی ڈگری سے کم ہو ________ کہلاتی ہے۔

(a) مساوات (b) غیر واجب کسر

(c) مماثلت (d) واجب کسر

(v) $\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)}$ ایک ________ ہے۔

(a) غیر واجب کسر (b) مساوات

(c) واجب کسر (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ایک ________ ہے۔

(a) یک درجی مساوات (b) مساوات

(c) مماثلت (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vii) $\frac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$ ایک ________ ہے۔

(a) واجب کسر (b) غیر واجب کسر

(c) مماثلت (d) مستقل رقم

(viii) $\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ کی جزوی کسور ________ قسم کی ہوتی ہیں۔

(a) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ (b) $\frac{Ax}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

(c) $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x+2}$ (d) $\frac{Ax+B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

(ix) $\frac{x+2}{(x+1)(x^2+2)}$ کی جزوی کسور ________ قسم کی ہوتی ہیں۔

(a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+2}$ (b) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$

(c) $\frac{Ax+B}{x+1} + \frac{C}{x^2+2}$ (d) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{x^2+2}$

(x) $\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ کی جزوی کسور ________ قسم کی ہوتی ہیں۔

(a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ (b) $1 + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x-1}$

(c) $1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ (d) $\frac{Ax+B}{(x+1)} + \frac{C}{x-1}$

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) ناطق کسر کی تعریف کریں۔

(ii) واجب کسر کیا ہوتی ہے؟

(iii) غیر واجب کسر کیا ہوتی ہے؟

(iv) جزوی کسور کیا ہوتی ہیں؟

(v) $\frac{x-2}{(x+2)\,(x+3)}$ کی جزوی کسور کس طرح بنائی جاسکتیں ہیں؟

(vi) $\frac{1}{x^2-1}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

(vii) $\frac{3}{(x+1)(x-1)}$ کی جزوی کسور معلوم کریں۔

(viii) $\frac{x}{(x-3)^2}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کریں۔

(ix) $\frac{x}{(x+a)(x-a)}$ کی جزوی کسور کس طرح بنائی جاسکتیں ہیں؟

(x) کیا $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ایک مماثلت ہے؟

خلاصہ

- کسر دو اعداد یا الجبری جملوں کی نسبت ہوتی ہے۔
- $\frac{N(x)}{D(x)}$ قسم کی کسر جس میں $N(x)$ اور $D(x)$ حقیقی عددی سروں کے ساتھ کثیر رقمیاں ہوں جبکہ $D(x) \neq 0$ ناطق کسر کہلاتی ہے۔ ہر کسری جملے کو دو کثیر رقمیوں کی نسبت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔
- ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x) \neq 0$، واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ نسب نما میں کثیر رقمی $D(x)$ کے درجہ سے کم ہو۔
- ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x) \neq 0$، غیر واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ نسب نما میں کثیر رقمی $D(x)$ کے درجہ سے زیادہ ہو یا برابر ہو۔
- جزوی کسور: حاصل کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$، جبکہ $D(x) \neq 0$ کی تحلیل جب:

(a) $D(x)$، غیر مکرر یک درجی اجزائے ضربی پر مشتمل ہو۔

(b) $D(x)$، مکرر یک درجی جزو ضربی پر مشتمل ہو۔

(c) $D(x)$، غیر مکرر، دو درجی جزو ضربی پر مشتمل ہو۔

(d) $D(x)$، مکرر دو درجی جزو ضربی پر مشتمل ہو۔

یونٹ 5

سیٹ اور تفاعل

(SETS AND FUNCTIONS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- سیٹ
- سیٹوں N، W، Z، E، O، P اور Q کی دہرائی کرنا۔
- سیٹوں پر عوامل (... ,\ ,∩ ,∪) کی پہچان کرنا۔
- سیٹوں پر یونین، تقاطع، فرق اور کمپلیمنٹ کا عمل درآمد کرنا۔
- دو یا تین سیٹوں کے یونین اور تقاطع کی مندرجہ ذیل خصوصیات کو ثابت کرنا۔
  - یونین کی خاصیت مبادلہ
  - تقاطع کی خاصیت مبادلہ
  - یونین کی خاصیت تلازم
  - تقاطع کی خاصیت تلازم
  - یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی
  - تقاطع کی یونین پر خاصیتِ تقسیمی
  - ڈی مارگنز کے قوانین
- دیے ہوئے سیٹوں کی بنیادی خصوصیات کو صحیح ثابت کرنا۔
- وین ڈایاگرام کے ذریعہ مندرجہ ذیل خصوصیات کو ظاہر کرنا۔
  - سیٹوں کا یونین اور تقاطع
  - سیٹ کا کمپلیمنٹ
- وین ڈایاگرام کے ذریعہ مندرجہ ذیل کو صحیح ثابت کرنا۔
  - سیٹوں کے یونین اور تقاطع کا قانون مبادلہ
  - ڈی مارگنز کے قوانین

- قانون تلازم
- قانون تقسیمی

- مترتب جوڑوں اور کارتیسی ضربی سیٹ کی پہچان کرنا۔
- ثنائی ربط کی تعریف کرنااور اس کے ڈومین سیٹ اور رینج سیٹ کی پہچان کرنا۔
- تفاعل (فنکشن) کی تعریف اور اس کے ڈومین سیٹ، کوڈومین سیٹ، اور رینج سیٹ کی پہچان کرنا۔
- مندرجہ ذیل کا عملی طور واضح کرنا۔
  - ان ٹو تفاعل
  - ون۔ون تفاعل
  - ان ٹو اور ون۔ون تفاعل (ان جیکٹیو فنکشن)
  - آن ٹو تفاعل (سر جیکٹیو فنکشن)
  - ون۔ون اور آن ٹو تفاعل (بائی جیکٹیو فنکشن)
- جانچنا کہ دیا ہوا ربط تفاعل ہے یا نہیں۔
- ون۔ون مطابقت اور ون۔ون تفاعل کے درمیان فرق کو ظاہر کرنا۔
- اوپر دیے گئے تمام تصورات کے درمیان فرق کو ظاہر کرنے کے لیے کافی سوال مشقوں میں شامل کرنا۔

5.1 سیٹ (SET)

واضح اشیا کا مجموعہ، سیٹ کہلاتا ہے اور سیٹ کو C, B, A وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

5.1.1(i) چند اہم سیٹ (Some Important Sets):

سیٹ تھیوری میں، ہم عام طور پر درج ذیل اعداد کے سیٹوں کو بنیادی علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

قدرتی اعداد کا سیٹ $= N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

مکمل اعداد کا سیٹ $= W = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $= Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\}$

تمام جفت اعداد کا سیٹ $= E = \{0, \pm2, \pm4, \cdots\}$

تمام طاق اعداد کا سیٹ $= O = \{\pm1, \pm3, \pm5, \cdots\}$

مفرد اعداد کا سیٹ $= P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$

تمام ناطق اعداد کا سیٹ $= Q = \{x \mid x = \frac{m}{n}$, جبکہ $m, n \in Z$ اور $n \neq 0\}$

تمام غیر ناطق اعداد کا سیٹ $= Q' = \{x \mid x \neq \frac{m}{n}$, جبکہ $m, n \in Z$ اور $n \neq 0\}$

تمام حقیقی اعداد کا سیٹ $= R = Q \cup Q'$

5.1.1(ii) سیٹوں پر عوامل $(\cup, \cap, \backslash, \ldots)$ کی پہچان

Recognize operations on sets $(\cup, \cap, \backslash, \ldots)$:

(a) سیٹوں کا یونین (Union of sets)

دو سیٹوں A اور B کا یونین سیٹ ان تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو A میں یا B میں یا دونوں میں ہوں۔ اس کو $A \cup B$ لکھتے اور A یونین B پڑھتے ہیں۔

پس $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B$ یا $x \in A$ اور $B\}$

مثال کے طور پر، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{4, 5, 6, 7\}$

تو $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(b) سیٹوں کا تقاطع (Intersection of sets)

دو سیٹوں A اور B کا تقاطع ایک ایسا سیٹ ہوتا ہے جو A اور B کے تمام مشترک ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ اس کو $A \cap B$ لکھتے اور A تقاطع B پڑھتے ہیں۔

پس $A \cap B = \{x | x \in A$ اور $x \in B\}$

ظاہر ہے کہ $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ اور $x \in B$

مثال کے طور پر، اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{c, d, e, f\}$

تو $A \cap B = \{c, d\}$

(c) سیٹوں کا فرق (Difference of sets)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو ان کے فرق A-B یا A\B کو یوں بیان کرتے ہیں۔

$A - B = \{x | x \in A$ اور $x \notin B\}$

اسی طرح $B - A = \{x | x \in B$ اور $x \notin A\}$

مثال کے طور پر، اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

اور $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

تو $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{1, 3\}$

اور $B - A = \{2, 4, 5, 6, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 8\}.$

(d) سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of a set)

اگر U ایک یونیورسل سیٹ ہو اور A اس کا تحتی سیٹ ہو تو A کے کمپلیمنٹ میں U کے وہ تمام ارکان شامل ہوتے ہیں جو سیٹ A کے رکن نہیں ہوتے۔ اس کو A^c یا A' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس لیے $A' = U - A = \{x | x \in U$ اور $x \notin A\}$

مثال کے طور پر، اگر $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ اور $A = \{2, 4, 6, 8\}$

تو $A' = U - A = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{2, 4, 6, 8\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

5.1.1 (iii) سیٹوں پر عوامل کا سرانجام دینا (Perform operations on sets)

مثال: اگر $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}, A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 5, 8\}$ تو معلوم کریں۔

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) A' اور B'

حل:

(i) $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{3, 5, 8\} = \{2, 3, 5, 7, 8\}$

(ii) $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{3, 5, 8\} = \{3, 5\}$

(iii) $A \backslash B = \{2, 3, 5, 7\} \backslash \{3, 5, 8\} = \{2, 7\}$

(iv) $A' = U - A = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$B' = U - B = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{3, 5, 8\} = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 10\}$

مشق 5.1

-1 اگر $Y = \{2, 4, 5, 9\}$ اور $X = \{1, 4, 7, 9\}$ ہو تو معلوم کریں۔

(i) $X \cup Y$ (ii) $X \cap Y$ (iii) $Y \cup X$ (iv) $Y \cap X$

-2 اگر $X =$ مفرد اعداد جو 17 سے چھوٹے یا برابر ہوں، کا سیٹ

اور $Y =$ پہلے 12 قدرتی اعداد کا سیٹ

تو مندرجہ ذیل معلوم کریں۔

(i) $X \cup Y$ (ii) $Y \cup X$ (iii) $X \cap Y$ (iv) $Y \cap X$

-3 اگر $T = O^+$, $Y = Z^+$, $X = \phi$ تو معلوم کریں۔

(i) $X \cup Y$ (ii) $X \cup T$ (iii) $Y \cup T$

(iv) $X \cap Y$ (v) $X \cap T$ (vi) $Y \cap T$

-4 اگر $U = \{x \mid x \in N \wedge 3 < x \leq 25\}$،

$X = \{x \mid x P \wedge 8 < x < 25\}$ اور $Y = \{x \mid x \in W \wedge 4 \leq x \leq 17\}$ تو قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $(X \cup Y)'$ (ii) $X' \cap Y'$ (iii) $(X \cap Y)'$ (iv) $X' \cup Y'$

-5 اگر $X = \{2, 4, 6, \cdots, 20\}$ اور $Y = \{4, 8, 12, \ldots, 24\}$, تو مندرجہ ذیل معلوم کریں۔

(i) $X - Y$ (ii) $Y - X$

-6 اگر $A = N$ اور $B = W$ تو قیمت معلوم کریں۔

(i) $A - B$ (ii) $B - A$

5.1.2 (iv) یونین اور تقاطع کی خصوصیات (Properties of Union and Intersection)

(a) یونین کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of union)

دو سیٹوں A اور B کے لیے ثابت کریں کہ $A \cup B = B \cup A$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in A \cup B$

(سیٹوں کے یونین کی تعریف کے مطابق) $\Rightarrow x \in A$ یا $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ یا $x \in A$

$\Rightarrow x \in B \cup A$

$\Rightarrow A \cup B \subseteq B \cup A$ (i)

اب فرض کریں کہ $y \in B \cup A$

(سیٹوں کی یونین کی تعریف کے مطابق) $\Rightarrow y \in B$ یا $y \in A$

$\Rightarrow \quad y \in A$ یا $y \in B$

$\Rightarrow \quad y \in A \cup B$

$\Rightarrow \quad B \cup A \subseteq A \cup B \qquad$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$A \cup B = B \cup A$ (مساوی سیٹوں کی تعریف کے مطابق)

(b) تقاطع کی خاصیت مبادلہ (Commutative property of intersection)

دو سیٹوں A اور B کے لیے ثابت کریں کہ $A \cap B = B \cap A$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in A \cap B$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $x \in B$ (سیٹوں کے تقاطع کی تعریف کے مطابق)

$\Rightarrow \quad x \in B$ اور $x \in A$

$\Rightarrow \quad x \in B \cap A$

اس لیے (i) $A \cap B \subseteq B \cap A$

اب فرض کریں کہ $y \in B \cap A$

$\Rightarrow \quad y \in B$ اور $y \in A$ (سیٹوں کے تقاطع کی تعریف کے مطابق)

$\Rightarrow \quad y \in A$ اور $y \in B$

$\Rightarrow \quad y \in A \cap B$

اس لیے (ii) $B \cap A \subseteq A \cap B$

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$A \cap B = B \cap A$ (مساوی سیٹوں کی تعریف کے مطابق)

(c) یونین کی خاصیت تلازم (Associative property of union)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in (A \cup B) \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cup B)$ یا $x \in C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $x \in B$ یا $x \in C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $x \in B \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in A \cup (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ (i)

اسی طرح $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(d) تقاطع کی خاصیت تلازم (Associative property of intersection)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in (A \cap B) \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cap B)$ اور $x \in C$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ اور $x \in B)$ اور $x \in C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $(x \in B$ اور $x \in C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $x \in B \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in A \cap (B \cap C)$

اس لیے $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$ (i)

اسی طرح $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e) یونین کی تقاطع پر خاصیت تقسیمی (Distributive property of ∪ over ∩)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $x \in B \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ یا $(x \in B$ اور $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ یا $x \in B)$ اور $(x \in A$ یا $x \in C)$

$\Rightarrow \quad x \in A \cup B$ اور $x \in A \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow \quad A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (i)

اسی طرح فرض کریں کہ $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow \quad y \in (A \cup B)$ اور $y \in (A \cup C)$

$\Rightarrow \quad (y \in A$ یا $y \in B)$ اور $(y \in A$ یا $y \in C)$

$\Rightarrow \quad y \in A$ یا $(y \in B$ اور $y \in C)$

$\Rightarrow \quad y \in A$ یا $y \in B \cap C$

$\Rightarrow \quad y \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \qquad$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(f) تقاطع کی یونین پر تقسیمی خاصیت (Distributive property of $\cap$ over $\cup$)

کوئی سے تین سیٹوں A، B اور C کے لیے ثابت کریں کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ثبوت (Proof)

فرض کریں کہ $\quad x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $x \in B \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in A$ اور $(x \in B$ یا $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A$ اور $x \in B)$ یا $(x \in A$ اور $x \in C)$

$\Rightarrow \quad (x \in A \cap B)$ یا $(x \in A \cap C)$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow \quad A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad$ (i)

اسی طرح $\quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \qquad$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(g) ڈی مارگن کے قوانین (De-Morgan's laws)

دو سیٹوں A اور B کے لیے ثابت کریں کہ

(a) $\quad (A \cup B)' = A' \cap B' \qquad$ (b) $\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

ثبوت (Proof)

(a) فرض کریں کہ $\quad x \in (A \cup B)'$

$\Rightarrow \quad x \notin A \cup B \qquad$ (سیٹ کے کمپلیمنٹ کی تعریف کے مطابق)

$\Rightarrow \quad x \notin A$ اور $x \notin B$

$\Rightarrow \quad x \in A'$ اور $x \in B'$

$\Rightarrow \quad x \in A' \cap B' \qquad$ (سیٹ کے تقاطع کی تعریف کے مطابق)

$\Rightarrow \quad (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ (i)

اسی طرح $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کو استعمال کرتے ہوئے $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(b) فرض کریں کہ $x \in (A \cap B)'$

$\Rightarrow \quad x \notin A \cap B$

$\Rightarrow \quad x \notin A$ یا $x \notin B$

$\Rightarrow \quad x \in A'$ یا $x \in B'$

$\Rightarrow \quad x \in A' \cup B'$

$\Rightarrow \quad (A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$ (i)

فرض کریں کہ $y \in A' \cup B'$

$\Rightarrow \quad y \in A'$ یا $y \in B'$

$\Rightarrow \quad y \notin A$ یا $y \notin B$

$\Rightarrow \quad y \notin A \cap B$

$\Rightarrow \quad y \in (A \cap B)'$

$\Rightarrow \quad A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مشق 5.2

-1 اگر $X = \{1, 3, 5, 7, \cdots, 19\}$ ، $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, \cdots, 20\}$

اور $Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ ہو تو مندرجہ ذیل معلوم کریں۔

(i) $X \cup (Y \cup Z)$ (ii) $(X \cup Y) \cup Z$

(iii) $X \cap (Y \cap Z)$ (iv) $(X \cap Y) \cap Z$

(v) $X \cup (Y \cap Z)$ (vi) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

(vii) $X \cap (Y \cup Z)$ (viii) $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

-2 اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ اور $C = \{1, 4, 8\}$

ہو تو مندرجہ ذیل کو ثابت کریں۔

(i) $A \cap B = B \cap A$ (ii) $A \cup B = B \cup A$

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

-3 اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ اور $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ہو تو

ڈی مارگن قوانین کی تصدیق کریں۔

یعنی $(A \cup B)' = A' \cap B'$ اور $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4- اگر $U = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$، $X = \{1, 3, 7, 9, 15, 18, 20\}$ اور $Y = \{1, 3, 5, \cdots, 17\}$ تو ثابت کریں کہ

(i) $X - Y = X \cap Y'$ (ii) $Y - X = Y \cap X'$

(v) 5.1.2 دیے ہوئے سیٹوں کی مدد سے بنیادی خصوصیات کو صحیح ثابت کرنا:
(Verify the fundamental properties for given sets)

(a) اگر A اور B، U کے کوئی سے دو تحتی سیٹ ہوں تو $A \cup B = B \cup A$ (مبادلہ کا قانون)

مثال کے طور پر $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = \{2, 3, 5, 7\}$

تو $A \cup B = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

اور $B \cup A = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

پس ثابت ہوا کہ $A \cup B = B \cup A$

(b) تقاطع کی خاصیت مبادلہ: **(Commutative property of intersection)**

مثال کے طور پر $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = [2, 3, 5, 7\}$

تو $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$

اور $B \cap A = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$

پس ثابت ہوا کہ $A \cap B = B \cap A$

(c) اگر A، B اور C، U کے تحتی سیٹ ہوں تو $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (تلازم کا قانون)

فرض کریں کہ $A = \{1, 2, 4, 8\}$، $B = \{2, 4, 6\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6\}$

تو
$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= (A \cup B) \cup C \\
&= (\{1, 2, 4, 8\} \cup \{2, 4, 6\}) \cup \{3, 4, 5, 6\} \\
&= \{1, 2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}
\end{aligned}
$$

اور
$$
\begin{aligned}
\text{R.H.S} &= A \cup (B \cup C) \\
&= \{1, 2, 4, 8\} \cup (\{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) \\
&= \{1, 2, 4, 8\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}
\end{aligned}
$$

L.H.S = R.H.S.

پس سیٹوں کا یونین خاصیت تلازم رکھتا ہے۔

(d) اگر A, B اور C، U کے تحتی سیٹ ہوں تو $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (تلازم کا قانون)

فرض کریں کہ $A = \{1, 2, 4, 8\}$، $B = \{2, 4, 6\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6\}$

تو $\text{L.H.S} = (A \cap B) \cap C$

$= (\{1, 2, 4, 8\} \cap \{2, 4, 6\}) \cap \{3, 4, 5, 6\}$

$= \{2, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4\}$

اور $\text{R.H.S} = A \cap (B \cap C)$

$= \{1, 2, 4, 8\} \cap (\{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\})$

$= \{1, 2, 4, 8\} \cap \{4, 6\} = \{4\}$

$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

پس سیٹوں کا تقاطع خاصیت تلازم رکھتا ہے۔

تقسیمی قوانین (Distributive laws)

(e) یونین کی سیٹوں کے تقاطع پر خاصیت تقسیمی:

اگر A, B اور C یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہوں تو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

فرض کریں کہ $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ اور $C = \{3, 4, 5, 6\}$

تو $\text{L.H.S} = A \cup (B \cap C)$

$= \{1, 2, 4, 8\} \cup (\{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\})$

$= \{1, 2, 4, 8\} \cup \{4, 6\} = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

اور $\text{R.H.S} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$= (\{1, 2, 4, 8\} \cup \{2, 4, 6\}) \cap (\{1, 2, 4, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\})$

$= \{1, 2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 4, 6, 8\}$

$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

(f) تقاطع کی سیٹوں کے یونین پر خاصیت تقسیمی:

($\cap$ is distributive over $\cup$ of sets)

یعنی $\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

فرض کریں کہ

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 20\}$

$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$C = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$

$\text{L.H.S} = A \cap (B \cup C)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 20\} \cap (\{5, 10, 15, 20, 25, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27, 33\})$

$= \{1,2,3,4,5, \cdots, 20\} \cap \{3, 5, 9, 10, 15, 20, 21, 25, 27, 30, 33\}$

$= \{3, 5, 9, 10, 15, 20\}$

$$\begin{aligned}\text{R.H.S} &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\\ &= (\{1, 2, 3, 4, \cdots, 20\} \cap \{5, 10, 15, 20, 25, 30\})\\ &\quad \cup (\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 20\} \cap \{3, 9, 15, 21, 27, 33\})\\ &= \{5, 10, 15, 20\} \cup \{3, 9, 15\} = \{3, 5, 9, 10, 15, 20\}\end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S.

(g) ڈی مارگن کے قوانین (De Morgan's laws)

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ اور $(A \cup B)' = A' \cap B'$

فرض کریں کہ

$$U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$$
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow B' = \{7, 8, 9, 10\}$$

اب

$$\begin{aligned}A \cap B &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\\ &= \{2, 4, 6\}\end{aligned}$$

تو

$$\begin{aligned}\text{L.H.S} &= (A \cap B)' = U - (A \cap B)\\ &= \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\} - \{2, 4, 6\}\\ &= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\text{R.H.S} &= A' \cup B'\\ &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{7, 8, 9, 10\}\\ &= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}\end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

فرض کیا کہ

$$U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$$
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow B' = \{7, 8, 9, 10\}$$

اب

$$\begin{aligned}A \cup B &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}\\ \text{L.H.S} &= (A \cup B)' = U - (A \cup B)\\ &= \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}\\ &= \{7, 9\}\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\text{R.H.S} &= A' \cap B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{7, 8, 9, 10\}\\ &= \{7, 9\}\end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S

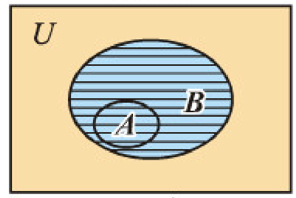
5.1.3 وین ڈایاگرام (Venn Diagram)

برطانوی ریاضی دان جان وین (1834-1923) نے یونیورسل سیٹ U کے لیے مستطیل کو پہلی دفعہ استعمال کیا اور اس کے تحتی سیٹوں A اور B کو اس کے اندر بند شکلوں کے طور پر استعمال کیا۔

5.1.3 (i) وین ڈایاگرام کو سیٹوں کے یونین اور تقاطع کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرنا

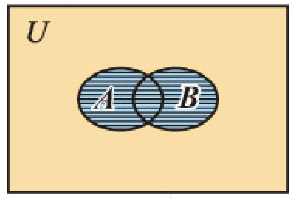
(a) سیٹوں کے یونین اور تقاطع:

$A \subseteq B$



شکل 3

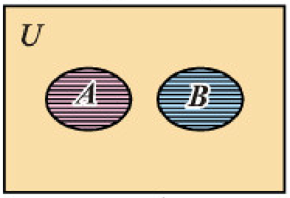
متراکب سیٹوں کے لیے



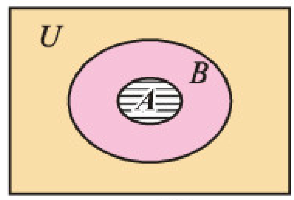
شکل 2

غیر متراکب سیٹوں کے لیے

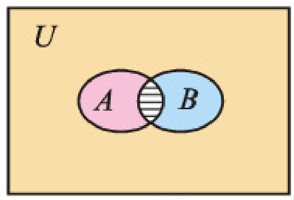
$A \quad B$



شکل 1

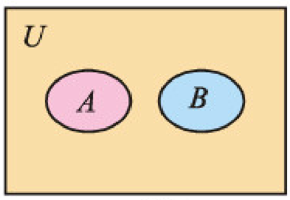


شکل 6



شکل 5

A B

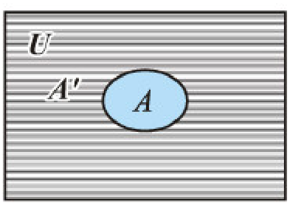


شکل 4

(اشکال 1 سے 6 تک خطوں کو افقی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔)

(b) سیٹ کا کمپلیمنٹ (Complement of set)

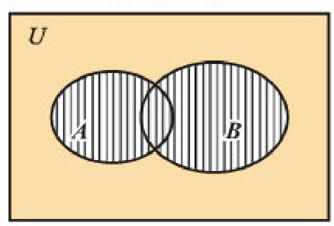
$U - A = A'$ کو افقی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



5.1.3 (vii) وین ڈایاگرام کو قانونِ مبادلہ کی تصدیق کے لیے استعمال کرنا:

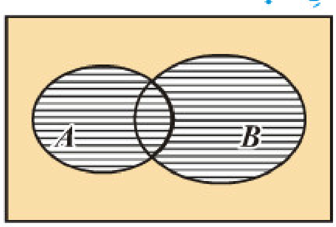
(a) سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے لیے قانونِ مبادلہ:

$B \quad A$



$B \cup A$ کو عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

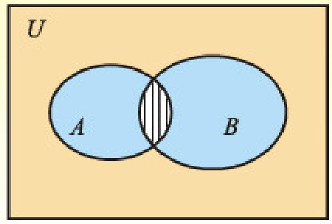
$A \quad B$



$A \cup B$ کو افقی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

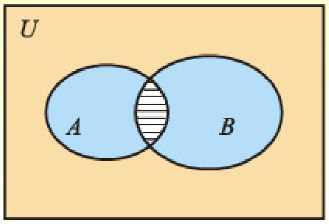
دونوں صورتوں میں خطے برابر ہیں۔ پس $A \cup B = B \cup A$

B A



$B \cap A$ کو عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

A B



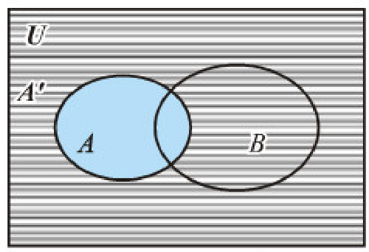
$A \cap B$ کو افقی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

دونوں صورتوں میں خطے برابر ہیں۔ پس $A \cap B = B \cap A$

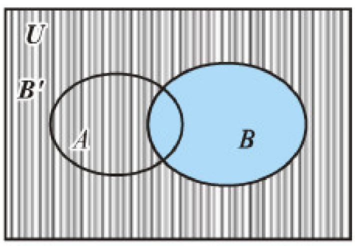
(b) ڈی مارگن کے قوانین (De Morgan's laws)

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

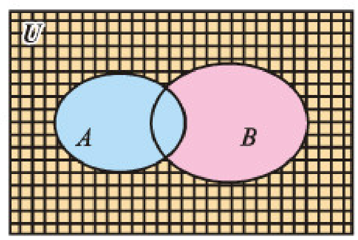


شکل 1: A' کو افقی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



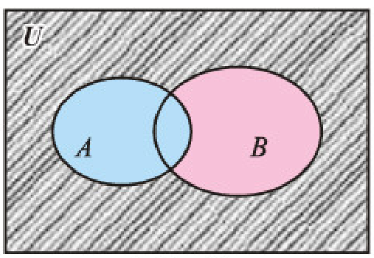
شکل 2: B' کو عمودی قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

A′ B′



شکل 3: $A' \cap B'$ کو مربعوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

(A B)′



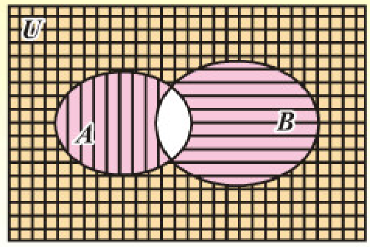
شکل 4: $(A \cup B)'$ کو ترچھے قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 3 اور 4 کے خطے برابر ہیں

پس $(A \cup B)' = A' \cap B'$

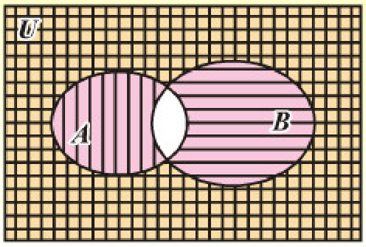
(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

A' B'



شکل 5: $A' \cup B'$ کو افقی، عمودی قطعاتِ خط اور مربعوں کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

$(A \cap B)'$

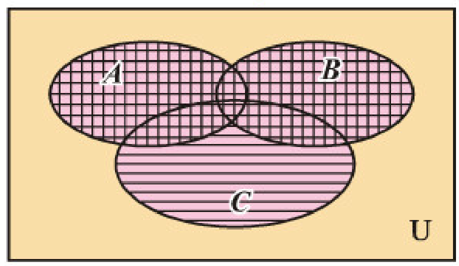


شکل 6: $U - (A \cap B) = (A \cap B)'$ کو افقی، عمودی قطعاتِ خط اور مربعوں کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 5 اور 6 کے خطے برابر ہیں۔

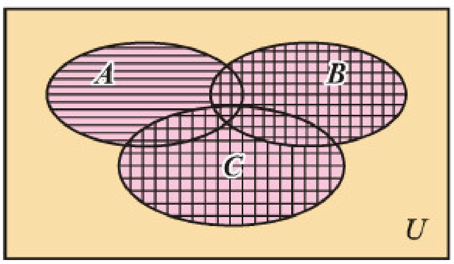
پس $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(c) قانونِ تلازم (Associative law)



شکل 1

$(A \cup B) \cup C$ کو شکل 1 میں دکھایا گیا ہے۔

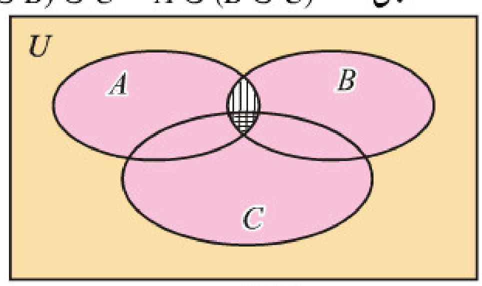


شکل 2

$A \cup (B \cup C)$ کو شکل 2 میں دکھایا گیا ہے۔

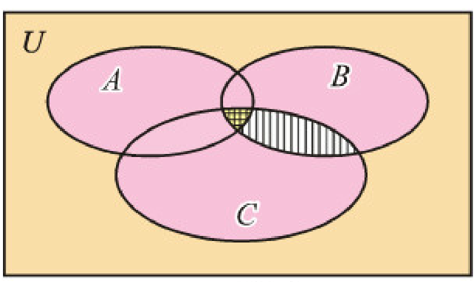
اشکال 1 اور 2 کے خطے برابر ہیں۔

پس $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$



شکل 3

$(A \cap B) \cap C$ کو شکل 3 میں ڈبل کراسنگ قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



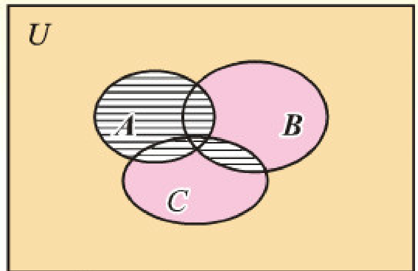
شکل 4

$A \cap (B \cap C)$ کو شکل 4 میں ڈبل کراسنگ قطعات خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

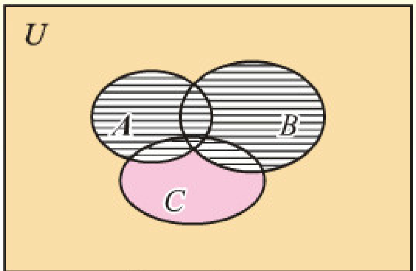
اشکال 3 اور 4 کے خطے برابر ہیں۔

پس $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

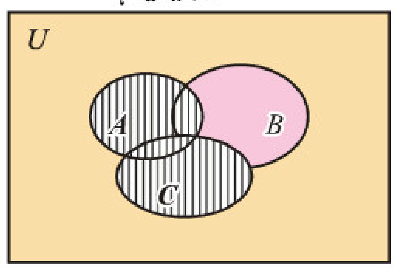
(d) قانونِ تقسیمی (Distributive law):



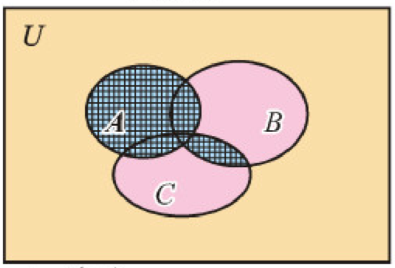
شکل 1: $A \cup (B \cap C)$ کو شکل میں افقی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 2: $A \cup B$ کو شکل میں افقی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



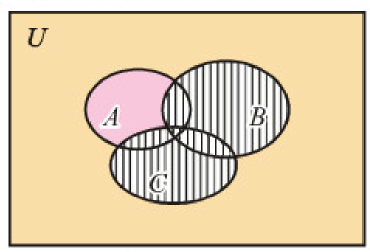
شکل 3: $A \cup C$ کو شکل میں عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



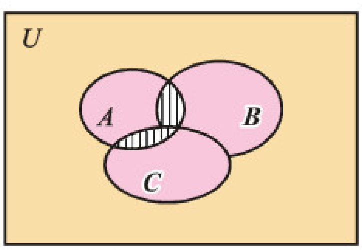
شکل 4: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کو شکل میں ڈبل کراسنگ قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 1 اور 4 کے خطے برابر ہیں۔

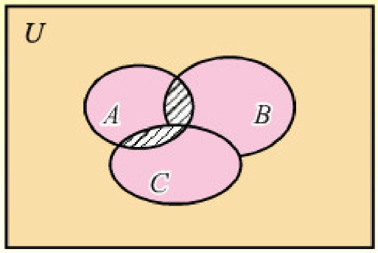
پس $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



شکل 5: $B \cup C$ کو شکل میں عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 6: $A \cap (B \cup C)$ کو شکل میں عمودی قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 7: $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ کو شکل میں ترچھے قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اشکال 6 اور 7 کے خطے برابر ہیں۔

پس $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

مشق 5.3

-1 اگر $B = \{1, 4, 7, 10\}$ اور $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$ ہو تو مندرجہ ذیل سوالات کو صحیح ثابت کریں۔

(i) $A - B = A \cap B'$ (ii) $B - A = B \cap A'$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $(A - B)' = A' \cup B$ (vi) $(B - A)' = B' \cup A$

-2 اگر $B = \{1, 4, 7, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$ اور $C = \{1, 5, 8, 10\}$ ہو تو مندرجہ ذیل سوالات کو صحیح ثابت کریں۔

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

-3 اگر $U = N$ تو $A = \phi$ اور $B = P$ کو استعمال کرتے ہوئے ڈی مارگن قوانین کی تصدیق کریں۔

-4 اگر $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$ ہو تو مندرجہ ذیل سوالات کو وین ڈایاگرام سے ثابت کریں۔

(i) $A - B = A \cap B'$ (ii) $B - A = B \cap A'$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $(A - B)' = A' \cup B$ (vi) $(B - A)' = B' \cup A$

5.1.4 (viii) مترتب جوڑے اور کارتیسی حاصلِ ضرب
(Ordered pairs and Cartesian product)

5.1.4 (a) مترتب جوڑے (Ordered pairs)

کوئی سے دو اعداد x اور y کو (x, y) کی شکل میں لکھنے کو مترتب جوڑا کہا جاتا ہے۔ مترتب جوڑے (x, y) میں اعداد کی ترتیب بہت اہمیت رکھتی ہے۔ جس میں x پہلا رکن اور y دوسرا رکن ہے۔ مثال کے طور پر $(3,2)$ مختلف ہے $(2, 3)$ سے صاف ظاہر ہے کہ $(x, y) \neq (y, x)$ جب تک کہ $x = y$

یاد رہے کہ

$(x, y) = (s, t)$ اگر $x = s$ اور $y = t$

5.1.4 (b) کارتیسی حاصلِ ضرب (Cartesian product)

دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے کارتیسی حاصل ضرب $A \times B$ میں تمام مترتب جوڑے (x, y) شامل ہوتے ہیں جبکہ $x \in A$ اور $y \in B$ ہو۔

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 5\}$، تو $A \times B$ اور $B \times A$ معلوم کریں۔

حل:

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$$

سیٹ A کے 3 ارکان ہیں اور سیٹ B کے 2 ارکان ہیں۔

پس $3 \times 2 = 6$ مترتب جوڑے $A \times B$ رکھتا ہے۔

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

بلاشبہ $A \times B \neq B \times A.$

مشق 5.4

-1 اگر $A = \{a, b\}$ اور $B = \{c, d\}$ تو $A \times B$ اور $B \times A$ معلوم کریں۔

-2 اگر $A = \{0, 2, 4\}$، $B = \{-1, 3\}$، تو $A \times B$، $B \times A$، $A \times A$، $B \times B$ معلوم کریں۔

-3 a اور b معلوم کریں اگر

(i) $(a - 4, b - 2) = (2, 1)$ (ii) $(2a + 5, 3) = (7, b - 4)$

(iii) $(3 - 2a, b - 1) = (a - 7, 2b + 5)$

-4 X اور Y معلوم کریں اگر $X \times Y = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, a)\}$

-5 اگر $X = \{a, b, c\}$ اور $Y = \{d, e\}$ تو مندرجہ ذیل ضربی سیٹوں کے ارکان کی تعداد معلوم کریں۔

(i) $X \times Y$ (ii) $Y \times X$ (iii) $X \times X$

5.2 ثنائی ربط (Binary Relation)

اگر A اور B کوئی سے دو غیر خالی سیٹ ہوں اور $R \subseteq A \times B$ تو سب سیٹ R، A سے B میں **ثنائی ربط** کہلاتا ہے۔ کیونکہ R میں ہر مترتب جوڑے کے پہلے اور دوسرے رکن کے درمیان کچھ تعلق ہوتا ہے۔

ربط کے ڈومین سیٹ میں ہر مترتب جوڑے کا پہلا رکن شامل ہوتا ہے۔ اور اسکو Dom R سے ظاہر کرتے ہیں۔

ربط کے رینج سیٹ میں ہر مترتب جوڑے کا دوسرا رکن شامل ہوتا ہے۔ اسے Range R سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $A = \{2, 3, 4, 5\}$، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ اور

$R : A \to B = \{x\,R\,y \mid y = 2x \wedge x \in A, y \in B\}$ تو Dom R اور Range R معلوم کریں۔

حل:

$$R = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

Dom $R = \{2, 3, 4\} \subseteq A$ اور Range $R = \{4, 6, 8\} \subseteq B$

مثال 2: فرض کیا $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{1, 2, 3, 5\}$

ربط بنانے سے $R : A \to B = \{x\,R\,y \mid x + y = 6 \wedge x \in A, y \in B\}$ تو Dom R اور Range R معلوم کریں۔

حل:

$$R = \{(1, 5), (3, 3), (4, 2)\}$$

Dom $R = \{1, 3, 4\} \subseteq A$ اور Range $R = \{2, 3, 5\} \subseteq B$

5.3 تفاعل یا میپنگ (Function or mapping)

(i) فرض کریں کہ A اور B دو غیر خالی سیٹ ہوں تو ربط '$f : A \to B$' تفاعل کہلاتا ہے۔

اگر (i) Dom $f = A$ (ii) ہر x جو A میں ہو۔ f کے صرف ایک ہی مترتب جوڑے کا پہلا رکن ہوتا ہے۔

متبادل تعریف (Alternate Definition)

فرض کریں کہ A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں تو ربط $f : A \to B$ **تفاعل** کہلاتا ہے۔

اگر (i) Dom $f = A$

(ii) ہم A کے ہر رکن x کے لیے B کے کسی رکن y سے یکتا تعلق جوڑ سکتے ہیں۔ جیسے $y = f(x) \in B$

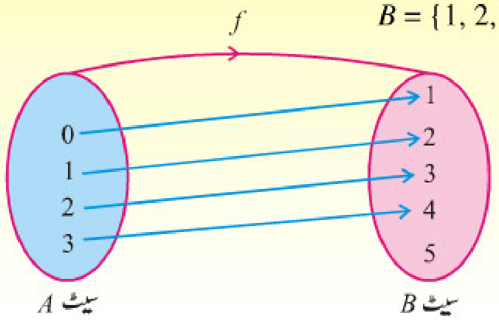
فنکشن کے ڈومین سیٹ، کوڈومین سیٹ اور رینج سیٹ
(Domain, Co-domain and Range Foundation):

اگر $f : A \to B$ ایک تفاعل ہو تو A تفاعل f کا ڈومین سیٹ اور B تفاعل f کا **کوڈومین سیٹ** کہلاتے ہیں۔

f کا ڈومین سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے تمام پہلے ارکان پر مشتمل ہوتا ہے اور f کا **رینج سیٹ**، f کے مترتب جوڑوں کے تمام دوسرے ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔

مثال: فرض کریں کہ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

تفاعل $f : A \to B$ ہے جب کہ



$f = \{(x, y) \mid y = x + 1 \wedge \forall\, x \in A\,,\, y \in B\}$

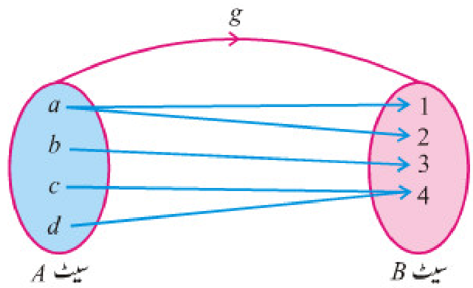
$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

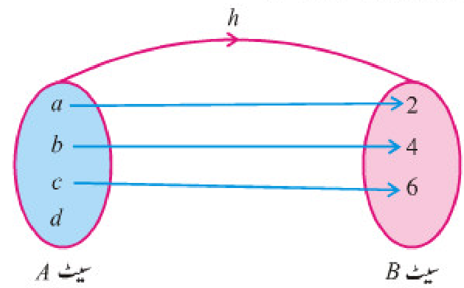
$\text{Dom } f = \{0, 1, 2, 3\} = A$

$\text{Range } f = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq B.$

مندرجہ ذیل روابط کی مثالیں ہیں نہ کہ تفاعلوں کی۔

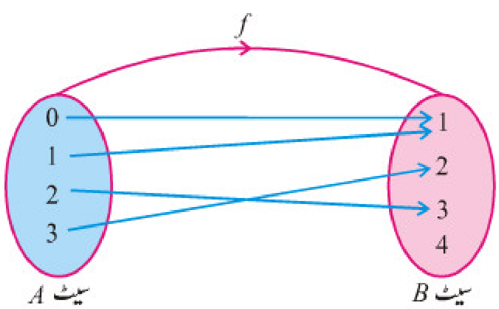
g ایک فنکشن نہیں ہے کیونکہ $a \in A$، سیٹ B میں دو امیجز رکھتا ہے اور h فنکشن نہیں ہے کیونکہ $d \in A$، سیٹ B میں کوئی امیج نہیں رکھتا۔





5.3 (ii) مندرجہ ذیل کا اظہار کرنا (Demonstrate the following)

(a) ان ٹو تفاعل (Into function)



$f : A \to B$ **ان ٹو فنکشن**، کہلاتا ہے اگر B کا کم از کم ایک رکن، سیٹ A کے کسی بھی رکن کا عکس نہ ہو یعنی

$\text{Range } f \subset B$

مثال کے طور پر ہم $f : A \to B$ کو بطور تفاعل بیان کرتے ہیں جو کہ

$f = \{(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

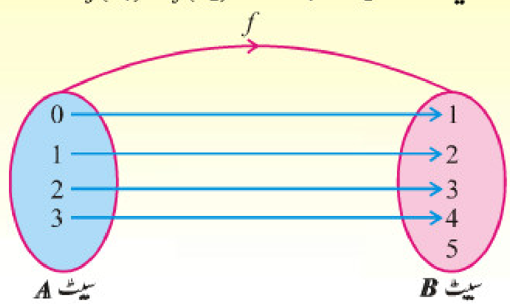
یہاں $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4\}$

f ایک ان ٹو تفاعل (فنکشن) ہے۔

(b) ون۔ون تفاعل (One-One function)

ایک فنکشن $f : A \to B$ **ون۔ون فنکشن** کہلاتا ہے۔ اگر A کے تمام ارکان کے واضح عکس (Image) B میں ہوں۔

یعنی $\forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ یا $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \in A$



مثال کے طور پر اگر $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ تب $f : A \to B$ کو بطور تفاعل
بیان کرتے ہیں۔ جو کہ

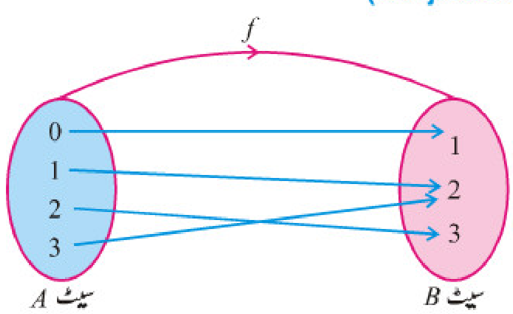
$$f = \{(x, y) \mid y = x + 1, \forall x \in A , y \in B\}.$$
$$= \{(0, 1,), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

f، ون۔ ون تفاعل (فنکشن) ہے۔

(c) ان ٹو اور ون۔ ون تفاعل (فنکشن) (ان جیکٹیو فنکشن) (Injective function)

تفاعل f جس کی (b) میں بحث کی گئی ہے۔ ان ٹو تفاعل بھی ہے۔ پس f ایک ان ٹو اور ون۔ ون تفاعل (فنکشن) ہے۔

(d) آن ٹو یا سرجیکٹیو تفاعل (Surjective function)



ایک تفاعل $f : A \to B$ **آن ٹو فنکشن** کہلاتا ہے
اگر سیٹ B کا ہر رکن، سیٹ A کے کم از کم ایک رکن کا امیج
ہو۔ یعنی $\text{Range } f = B$

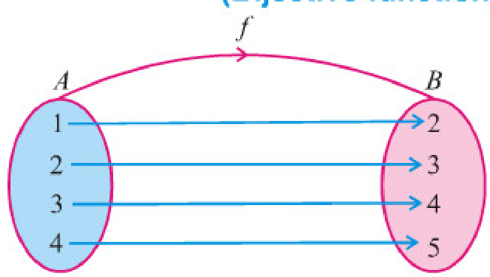
مثال کے طور پر اگر $A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور
جبکہ $B = \{1, 2, 3\}$ تو $f : A \to B$

$$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

یہاں $\text{Range } f = \{1, 2, 3\} = B$

پس f ایک آن ٹو تفاعل (فنکشن) کو بیان کرتا ہے۔

(e) بائی جیکٹیو تفاعل یا ون ٹو ون مطابقت (Bijective function)



ایک تفاعل $f : A \to B$ **بائی جیکٹیو فنکشن**
کہلاتا ہے اگر تفاعل f ون۔ ون اور آن ٹو ہو۔

مثال کے طور پر اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور
$B = \{2, 3, 4, 5\}$ تو تفاعل $f : A \to B$ کو اس طرح
بیان کرتے ہیں۔

$$f = \{(x, y) \mid y = x + 1, \forall x \in A, y \in B\}$$

تو $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

بلاشبہ یہ تفاعل ون۔ ون ہے کیونکہ A کے تمام واضح ارکان کے واضح عکس B میں ہیں۔ یہ آن ٹو تفاعل بھی ہے کیونکہ B کا ہر رکن کم از کم A کے ایک رکن کا عکس ہے۔

نوٹ:

(i) ہر فنکشن ایک ربط ہے لیکن اس کا معکوس درست نہیں۔

(ii) ہر فنکشن ون۔ ون نہیں ہوتا۔

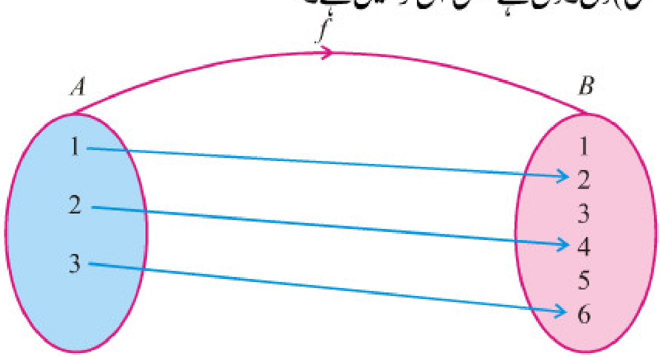
(iii) ہر فنکشن آن۔ ٹو نہیں ہوتا۔

مثال: فرض کرو کہ $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ہم تفاعل اس طرح بیان کرتے ہیں $f: A \to B = \{(x, y) \mid y = 2x, \forall\, x \in A, y \in B\}$

تو $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

یہ تفاعل (فنکشن) ون۔ ون ہے لیکن آن ٹو نہیں ہے۔



5.3 (iii) جانچنا آیا کہ دیا ہوا ربط ایک تفاعل ہے:
(Examine whether a given relation is a function):

ایک ربط جس کی ڈومین کے ہر رکن x کا یکتا عکس اس کی رینج میں ہو تو ایسا ربط، تفاعل ہوتا ہے۔

5.3 (iv) ون ٹو ون مطابقت اور ون ون تفاعل (فنکشن) کے درمیان موازنہ کرنا۔
(Differentiate between one-to-one correspondence and one-one function)

ایک تفاعل f سیٹ A سے سیٹ B پر ون۔ ون ہوتا ہے اگر A کے تمام واضح ارکان کے واضح عکس B میں ہوں اور f کی ڈومین سیٹ A کے برابر ہو اور رینج B میں ہو۔ دو سیٹوں A اور B کے درمیان ون ٹو ون مطابقت میں ہر ایک سیٹ کا ہر رکن دوسرے سیٹ کے رکن سے منسلک ہوتا ہے۔ اگر سیٹ A اور B متناہی ہوں تو ان سیٹوں میں ارکان کی تعداد ایک جتنی ہوتی ہے۔ یعنی $n(A) = n(B)$

مشق 5.5

1- اگر $M = \{3, 4\}, L = \{a, b, c\}$ ہو تو $L \times M$ اور $M \times L$ کے دو ثنائی روابط معلوم کریں۔

2- اگر $Y = \{-2, 1, 2\}$ ہو تو $Y \times Y$ کے لیے دو ثنائی روابط بنائیں۔ ان کی ڈومین اور رینج بھی معلوم کریں۔

3- اگر $L = \{a, b, c\}$ اور $M = \{d, e, f, g\}$ ہو تو درج ذیل ہر ایک کے دو ثنائی روابط معلوم کریں۔

(i) $L \times L$ (ii) $L \times M$ (iii) $M \times M$

4- اگر M کے 5 ارکان ہوں تو M میں ثنائی روابط کی تعداد معلوم کریں۔

5- اگر $L = \{x \mid x \in \mathrm{N} \wedge x \leq 5\}$، $M = \{y \mid y \in P \wedge y < 10\}$ تو مندرجہ ذیل کے لیے L سے M پر روابط بنائیں۔

(i) $R_1 = \{(x, y) \mid y < x\}$ (ii) $R_2 = \{(x, y) \mid y = x\}$

(iii) $R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 6\}$ (iv) $R_4 = \{(x, y) \mid y - x = 2\}$

نیز ہر ربط کی ڈومین اور رینج لکھیں۔

6- مندرجہ ذیل میں سے روابط، اِن ٹو تفاعل، ون۔ون تفاعل، آن ٹو تفاعل اور بائی جیکٹیو تفاعل کی نشاندہی کریں۔ نیز ان کے ڈومین سیٹ اور رینج سیٹ معلوم کریں۔ (i) سے (vi) تک ہر جزو میں کوڈومین سیٹ کو رینج سیٹ کے برابر لیا گیا ہے۔

(i) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(ii) $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (3, 5)\}$

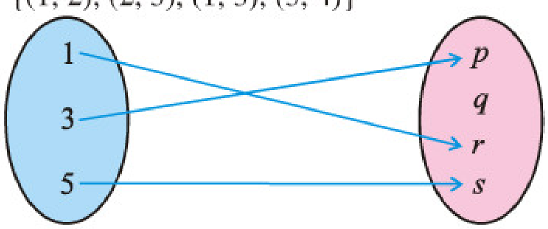
(iii) $R_3 = \{(b, a), (c, a), (d, a)\}$

(iv) $R_4 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 4)\}$

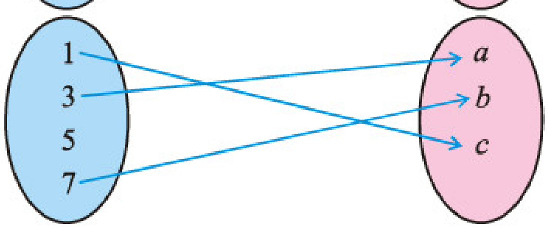
(v) $R_5 = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, e)\}$

(vi) $R_6 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4)\}$

(vii) $R_7 =$



(viii) $R_8 =$



متفرق مشق 5

1- کثیر الانتخابی سوالات

مندرجہ ذیل سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) واضح اشیا کا مجموعہ کہلاتا ہے۔

(a) تحتی سیٹ (b) پاور سیٹ

(c) سیٹ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) $Q = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$ سیٹ کہلاتا ہے۔

(a) مکمل اعداد (b) قدرتی اعداد

(c) غیر ناطق اعداد (d) ناطق اعداد

(iii) سیٹ کو بیان کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

(iv) سیٹ جس میں کوئی رکن نہ ہو، کہلاتا ہے۔

(a) تحتی سیٹ (b) خالی سیٹ

(c) یکتا سیٹ (d) سپر سیٹ

(v) $\{x \mid x \in W \wedge x \leq 101\}$ کہلاتا ہے۔

(a) غیر متناہی سیٹ (b) تحتی سیٹ

(c) خالی سیٹ (d) متناہی سیٹ

(vi) سیٹ جس میں صرف ایک رکن ہو، کہلاتا ہے۔

(a) خالی سیٹ (b) پاور سیٹ

(c) یکتا سیٹ (d) تحتی سیٹ

(vii) خالی سیٹ کا پاور سیٹ ہوتا ہے۔

(a) ϕ (b) $\{a\}$

(c) $\{\phi, \{a\}\}$ (d) $\{\phi\}$

(viii) $\{1, 2, 3\}$ کے پاور سیٹ کے ارکان کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 4　　(b) 6

(c) 8　　(d) 9

(ix) اگر $A \subseteq B$ ہو تو $A \cup B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A　　(b) B

(c) ϕ　　(d) ان میں سے کوئی نہیں

(x) اگر $A \subseteq B$ ہو تو $A \cap B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A　　(b) B

(c) ϕ　　(d) ان میں سے کوئی نہیں

(xi) اگر $A \subseteq B$ ہو تو $A - B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A　　(b) B

(c) ϕ　　(d) $B - A$

(xii) $(A \cup B) \cup C$ برابر ہوتا ہے۔

(a) $A \cap (B \cup C)$　　(b) $(A \cup B) \cap C$

(c) $A \cup (B \cup C)$　　(d) $A \cap (B \cap C)$

(xiii) $A \cup (B \cap C)$ برابر ہوتا ہے۔

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$　　(b) $A \cap (B \cap C)$

(c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$　　(d) $A \cup (B \cup C)$

(xiv) اگر A اور B غیر مشترک سیٹ ہوں تو $A \cup B$ برابر ہوتا ہے۔

(a) A　　(b) B

(c) ϕ　　(d) $B \cup A$

(xv) اگر سیٹ A میں ارکان کی تعداد 3 اور سیٹ B میں 4 ہو تو $A \times B$ میں ارکان کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 3　　(b) 4

(c) 12　　(d) 7

(xvi) اگر سیٹ A میں ارکان کی تعداد 3 اور B میں 2 ہو تو $A \times B$ کے ثنائی روابط کی تعداد ہوتی ہے۔

(a) 2^3 (b) 2^6

(c) 2^8 (d) 2^2

(xvii) اگر $R = \{(0, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ ہو تو Dom R ہوتی ہے۔

(a) $\{0, 3, 4\}$ (b) $\{0, 2, 3\}$

(c) $\{0, 2, 4\}$ (d) $\{2, 3, 4\}$

(xviii) اگر $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$ ہو تو Range R ہوتی ہے۔

(a) $\{1, 2, 4\}$ (b) $\{3, 2, 4\}$

(c) $\{1, 2, 3, 4\}$ (d) $\{1, 3, 4\}$

(xix) نقطہ $(-1, 4)$ ربع میں ہوتا ہے۔

(a) I (b) II

(c) III (d) IV

(xx) ربط $\{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ مندرجہ ذیل میں کونسا ہے؟

(a) آن ٹو (فنکشن) تفاعل (b) ان ٹو (فنکشن) تفاعل

(c) (فنکشن) تفاعل نہیں ہے (d) ون۔ون (فنکشن) تفاعل

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) تحتی سیٹ کی تعریف بیان کریں اور ایک مثال بھی دیں۔

(ii) سیٹ $\{a, b\}$ کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

(iii) $A \cap B$ کو وین ڈایا گرام سے ظاہر کریں اگر $A \subseteq B$ ہو۔

(iv) $A \cap (B \cup C)$ کو وین ڈایا گرام سے ظاہر کریں۔

(v) دو سیٹوں کے تقاطع کی تعریف کریں۔

(vi) تفاعل کی تعریف کریں۔

(vii) ون۔ون تفاعل کی تعریف کریں۔

(viii) آن۔ٹو تفاعل کی تعریف کریں۔

(ix) بائی جیکٹیو تفاعل کی تعریف کریں۔

(x) ڈی مارگن کے قوانین لکھیں۔

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) اگر $A \subseteq B$، تو $A \cup B =$ ________

(ii) اگر $A \cap B = \phi$ تو A اور B ________ ہیں۔

(iii) اگر $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ تو ________۔

(iv) $A \cap (B \cup C) =$ ________

(v) $A \cup (B \cap C) =$ ________

(vi) U کا کمپلیمنٹ ________ ہوتا ہے۔

(vii) ϕ کا کمپلیمنٹ ________ ہوتا ہے۔

(viii) $A \cap A^c =$ ________

(ix) $A \cup A^c =$ ________

(x) $\{x \mid x \in A$ اور $x \notin B\} =$ ________

(xi) نقطہ $(-5, -7)$ ________ ربع میں ہے۔

(xii) نقطہ $(4, -6)$ ________ ربع میں ہے۔

(xiii) x-axis پر ہر نقطہ کا y کوآرڈینیٹ ________ ہوتا ہے۔

(xiv) y-axis پر ہر نقطہ کا x کوآرڈینیٹ ________ ہوتا ہے۔

(xv) وین ڈایاگرام پہلی دفعہ ________ نے استعمال کی۔

(xvi) $\{(a, b), (b, c), (c, d)\}$ کی ڈومین ________ ہوتی ہے۔

(xvii) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ کی رینج ________ ہوتی ہے۔

(xviii) $A \times A$ کا سب سیٹ، A میں ________ کہلاتا ہے۔

(xix) اگر $f : A \to B$ اور f کی رینج B ہو تو f ایک ________ تفاعل ہے۔

(xx) ربط $\{(a, b), (b, c), (a, d)\}$ ایک تفاعل ________ ہے۔

خلاصہ

- واضح اشیا کے مجموعہ کو **سیٹ** کہتے ہیں۔
- دو سیٹوں A اور B کا **یونین** ایسے ارکان پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے جو A میں یا B میں یا دونوں میں ہوں۔ اس کو $A \cup B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- دو سیٹوں A اور B کا **تقاطع** دونوں سیٹوں کے مشترک ارکان پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے۔ اس کو $A \cap B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ علامتی طور پر اسے $A \cap B = \{x \mid x \in A$ اور $x \in B\}$ لکھتے ہیں۔

- سیٹ B اور A کے فرق کو $A - B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس سیٹ میں B کے وہ ارکان ہوتے ہیں جو A میں نہیں ہوتے۔
- U کے لحاظ سے سیٹ A کے **کمپلیمنٹ سیٹ** میں U کے وہ تمام ارکان ہوتے ہیں جو A میں نہیں ہوتے۔ اس کو $A^C = A' = U - A$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- برطانوی ریاضی دان جان وین (1834-1923) نے یونیورسل سیٹ U کے لیے مستطیل کو پہلی دفعہ استعمال کیا اور اس کے تحتی سیٹوں A اور B کو اس کے اندر بند اشکال کے طور پر استعمال کیا۔
- ایک مترتب جوڑے کے ارکان کو ایک خاص ترتیب سے لکھا جاتا ہے۔ جس میں ارکان کی ترتیب کی پابندی کی جاتی ہے۔
- دو غیر خالی سیٹوں A اور B کی کارتیسی حاصلِ ضرب میں تمام مترتب جوڑے (x, y) ہوتے ہیں۔ جب کہ $x \in A, y \in B$ تو اس سیٹ کو $A \times B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہوں اور $R \subseteq A \times B$ تو تحتی سیٹ R، A سے B میں **ثنائی ربط** کہلاتا ہے۔
- اگر دو غیر خالی سیٹ A اور B ہوں تو ربط $f : A \to B$ **تفاعل** کہلاتا ہے اگر

  (i) $\text{Dom}\, f = A$

  (ii) ہر رکن x جو A میں ہو، f کے صرف ایک ہی مترتب جوڑے کا پہلا رکن ہوتا ہے۔
- f کا ڈومین سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے پہلے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے اور f کا رینج سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے تمام دوسرے ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔
- ایک تفاعل '$f : A \to B$' **اِن ٹو تفاعل** کہلاتا ہے اگر B کا کم از کم ایک رکن سیٹ A کے کسی رکن کا عکس (امیج) نہ ہو۔ یعنی $\text{Range}\, f \subseteq B$
- ایک تفاعل '$f : A \to B$' **آن ٹو تفاعل** کہلاتا ہے اگر سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کے کم از کم ایک رکن کا عکس ہو یعنی $\text{Range}\, f = B$
- ایک تفاعل '$f : A \to B$' **ون۔ ون تفاعل** کہلاتا ہے اگر سیٹ A کے تمام واضح ارکان کے واضح عکس سیٹ B میں ہوں۔
- '$f : A \to B$' **بائی جیکٹیو تفاعل** کہلاتا ہے۔ اگر تفاعل f ون۔ ون اور آن ٹو ہو۔

یونٹ 6

بنیادی شماریات
(BASIC STATISTICS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درج ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- تعددی تقسیم کی تشکیل
- کالمی نقشہ کی تشکیل یکساں اور غیر یکساں جماعتی وقفہ کے ساتھ
- تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل
- مجموعی تعددی تقسیم کی تشکیل
- مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل
- حسابی اوسط (غیر گروہی اور گروہی مواد کیلئے) معلوم کرنا
  - حسابی اوسط کی بنیادی تعریف اور ضربی حسابی اوسط سے انحراف کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے
  - حسابی اوسط کی خصوصیات کی پہچان
- وزنی حسابی اوسط اور حرکتی (حسابی) اوسط معلوم کرنا
- وسطانیہ، اور عادہ کو بذریعہ گراف معلوم کرنا
- سعت، تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کرنا

6.1 تعددی تقسیم (Frequency Distribution)

خام مواد کو منظم یک طرفہ جدول کی صورت میں پیش کرنے کو **تعددی تقسیم** کہتے ہیں۔ اس جدول میں تمام مدّات/رقموں کو مختلف گروہوں یا جماعتوں میں تقسیم کر دیا جاتا ہے اور ہر گروہ کے مقابل اس میں آنے والی مدّات کی تعداد کو لکھا جاتا ہے۔

6.1(i) تعددی تقسیم کی تشکیل: (Construction of Frequency Distribution)

تعددی تقسیم کے مواد کی اقسام کی بنیاد پر دو قسمیں ہیں۔

(a) غیر مسلسل تعددی تقسیم (b) مسلسل متغیر تعددی تقسیم

(a) غیر مسلسل تعددی تقسیم: (Discrete Frequency Distribution)

غیر مسلسل تعددی تقسیم تشکیل دینے کا طریقہ کار درج ذیل ہے:

(i) سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی مد معلوم کریں۔ نیز جدول کے متغیر والے چھوٹی سے بڑی تک تمام مدّات کو ترتیب وار کالم میں لکھیں۔

(ii) مدّات کو شمار کر کے مطابقت (ٹیلی نشان) (Tally bar) کی مدد سے ان کی تعداد کو لکھیں۔

(iii) مطابقت کالم کی مدد سے تعددات کا کالم بنائیں۔

مثال 1: پانچ سکّوں کو بیس مرتبہ اُچھالا گیا اور ہیڈز (Heads) کی تعداد کو نوٹ کیا گیا جو کہ درجِ ذیل ہے۔
3, 4, 2, 3, 3, 5, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 4, 2, 2, 3, 3, 4, 2

ہیڈز (Heads) کی تعداد کی تعددی تقسیم بنائیں۔

حل: فرض کریں X = ہیڈز (Heads) کی تعداد

1 = سب سے چھوٹی رقم اور 5 = سب سے بڑی رقم

تعددی تقسیم درجِ ذیل ہے۔

ہیڈز (Heads) کی تعداد کی تعددی تقسیم		
X	ٹیلی کا نشان	تعدد
1	III	3
2	~~IIII~~ III	8
3	~~IIII~~	5
4	III	3
5	I	1

(b) مسلسل تعددی تقسیم: (Continuous Frequency Distribution)

مسلسل تعددی تقسیم تشکیل دینے کا طریقہ کار درج ذیل ہے:

(i) سعت معلوم کریں جبکہ

سب سے چھوٹی مد − سب سے بڑی مد = سعت

(سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مد کا فرق)

(ii) گروہوں کی تعداد کا فیصلہ کریں۔ عموماً یہ تعداد 5 اور 20 کے درمیان کوئی سا عدد ہو سکتا ہے اور اس کو 'k' سے ظاہر کرتے ہیں۔ سعت کے زیادہ ہونے سے گروہ بھی زیادہ ہوں گے۔ عام طور پر اس کا انحصار سعت پر ہوتا ہے۔

(iii) گروہی یا جماعتی وقفہ کو بذریعہ کلیہ نکالیں۔ اس کو 'h' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

جماعتی وقفہ = h ، جماعتوں کی تعداد = k

$$h = \frac{\text{سعت}}{k}$$ (کلیہ استعمال کریں جب 'h' نہ دیا ہو)

نوٹ: تخمینہ کے کلیہ میں h کو معلوم کرنے کے لیے سہولت دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر $h = 7.1$ یا $h = 7.9$ کو 8 لیا جاتا ہے۔

(iv) جدول میں جماعتی وقفہ کا کالم بنائیں۔ سب سے چھوٹی مد سے شروع کریں اور جماعتی وقفہ 'k' کو مد نظر رکھتے ہوئے جماعتی حدوں کی مدد سے تمام جماعتی وقفے لکھیں حتی کہ آخری جماعتی وقفہ میں سب سے بڑی مد شامل ہو جائے۔

(v) مواد سے مدات کو بذریعہ مطابقت یعنی ٹیلی نشان (عمودی لائنوں) سے نوٹ کریں۔

(vi) ہر ایک گروہ کے سامنے ٹیلی نشان کو گنا جائے اور پھر اس تعداد کو تعدد کے کالم میں متعلقہ گروہ یا جماعت کے مقابل لکھا جائے۔

مثال 2: ایک جماعت دہم 'X' کے چالیس (40) طالب علموں نے ریاضی میں جو نمبرز لیے وہ مندرجہ ذیل ہیں۔

51, 55, 32, 41, 22, 30, 35, 53, 30, 60, 59, 15, 7, 18, 40, 49, 40, 25, 14, 18,19, 2,
43, 22, 39, 26, 34, 19, 10, 17, 47, 38, 13, 30, 34, 54, 10, 21, 51, 52

10 کا جماعتی وقفہ لے کر ایک تعددی تقسیم تشکیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ طالبعلم کے نمبرز = X

اوپر دیے گئے مواد کے مطابق،

سب سے چھوٹی مد = 2 اور سب سے بڑی مد = 60

چونکہ ہمیں جماعتی وقفہ رقم میں دس(10) دیا گیا ہے لہٰذا ہم آسانی کے لئے زیریں (نچلی) جماعتی حد کو یا تو دو(2) سے شروع کریں گے یا اس کے قریب ترین صحیح عدد صفر(0) سے شروع کریں گے۔ تعددی تقسیم مندرجہ ذیل دو طریقوں سے بنائی جا سکتی ہے۔

پہلا طریقہ: ہم اصل مد کو اُس کی متعلقہ جماعت/گروہ میں مندرجہ ذیل طریقے سے لکھیں گے۔

تعددات	مدات	جماعت/گروہ
2	2, 7	0 --- 9
10	10, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 18, 19, 19	10 --- 19
5	21, 22, 22, 25, 26	20 --- 29
9	30, 30, 30, 32, 34, 34, 35, 38, 39	30 --- 39
6	40, 40, 41, 43, 47, 49	40 --- 49
7	51, 51, 52, 53, 54, 55, 59	50 --- 59
1	60	60 --- 69

دوسرا طریقہ: ہر مد کو اُس کے متعلقہ گروہ میں ٹیلی نشان (عمودی لائنوں) کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل طریقہ سے لکھیں گے۔

تعددات	ٹیلی نشان	گروہ/جماعت
2	II	0 --- 9
10	~~IIII~~ ~~IIII~~	10 --- 19
5	~~IIII~~	20 --- 29
9	~~IIII~~ IIII	30 --- 39
6	~~IIII~~ I	40 --- 49
7	~~IIII~~ II	50 --- 59
1	I	60 --- 69
40		کل تعداد

نوٹ: دوسرا طریقہ عموماً تعددی تقسیم کی تشکیل کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

مسلسل تعددی جدول میں استعمال ہونے والے تصورات

مسلسل تعددی جدول میں زیادہ تر مندرجہ ذیل اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں۔

(a) جماعتی حدود: (Class Limit)

ہر جماعت یا گروہ میں دو قیمتیں ہوتی ہیں ایک چھوٹی اور دوسری بڑی۔ اُس گروہ/ جماعت کی چھوٹی قیمت کو زیریں/ نچلی جماعتی حد اور بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد کہتے ہیں۔ جیسا کہ مثال 2 میں 30 ,20 ,10 ,0 وغیرہ زیریں جماعتی حدود اور 39 ,29 ,19 ,9 وغیرہ بالائی جماعتی حدود ہیں۔

(b) حقیقی جماعتی حدود: (Class Boundaries)

مسلسل تعددی تقسیم

جیسا کہ مثال نمبر 2 سے چند حقیقی جماعتی حدیں نیچے دی گئی ہیں۔

حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
−0.5 --- 9.5	0 --- 9
9.5 --- 19.5	10 --- 19
19.5 --- 29.5	20 --- 29
29.5 --- 39.5	30 --- 39

لہٰذا مثال نمبر '2' میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دس کی حقیقی زیریں جماعتی حد 9.5 ہے کیونکہ تمام قیمتیں جو 9.5 سے 10.49 کے درمیان ہیں انہیں 10 ہی سمجھا گیا ہے۔ جبکہ 19 کی بالائی جماعتی حد 19.5 ہے کیونکہ تمام وہ قیمتیں جو 18.5 سے 19.5 کے درمیان ہیں انہیں 19 ہی ریکارڈ کیا گیا ہے۔ کسی جماعت / گروہ میں حقیقی زیریں جماعتی حد اور حقیقی بالائی جماعتی حد کو حقیقی جماعتی حدود کہا جاتا ہے۔ عام طور پر حقیقی جماعتی حدود بنانے کے لئے ہم دوسری جماعت کی زیریں حد اور پہلی جماعت کی بالائی حد کے فرق کو معلوم کر کے اُسے '2' پر تقسیم کرتے ہیں اس قیمت کو زیریں جماعتی حد میں سے تفریق کرنے سے حقیقی زیریں جماعتی حد بنتی ہے اور اگر اسی قیمت کو بالائی جماعتی حد میں جمع کر دیا جائے تو بالائی جماعتی حد، حقیقی بالائی جماعتی حد بن جاتی ہے۔ یہی حقیقی بالائی جماعتی حد اگلی کلاس کی حقیقی زیریں جماعتی حد بھی ہوتی ہے۔

(c) جماعتی نشان/درمیانی نقطہ: (Class mark/Mid point)

کسی جماعت کے درمیانی نقطہ کو جماعتی نشان کہا جاتا ہے یہ ہر کلاس کی زیریں اور بالائی جماعتی حد کو جمع کر کے 2 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(d) مجموعی تعدد: (Cumulative Frequency)

مجموعی تعدد کا کالم تعددی کالم سے مرتب کیا جاتا ہے۔ کسی گروپ/کلاس کی بالائی حد سے کم تمام گروپس کے تعدد

(Frequency) کو مجموعی تعدد کہا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا اصطلاحات درج ذیل مثال نمبر 2 کی وضاحت کے لیے بیان کی گئی ہیں۔

مثال 3: مثال نمبر 2 کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی جماعتی حدود، درمیانی نقطہ / جماعتی نشان اور مجموعی تعدد نکالیں۔

حل:

مجموعی تعددات	تعددات	درمیانی نقطہ / جماعتی نشان	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
2	2	4.5	−0.5 —— 9.5	0 —— 9
2 + 10 = 12	10	14.5	9.5 —— 19.5	10 —— 19
12 + 5 = 17	5	24.5	19.5 —— 29.5	20 —— 29
17 + 9 = 26	9	34.5	29.5 —— 39.5	30 —— 39
26 + 6 = 32	6	44.5	39.5 —— 49.5	40 —— 49
32 + 7 = 39	7	54.5	49.5 —— 59.5	50 —— 59
39 + 1 = 40	1	64.5	59.5 —— 69.5	60 —— 69
	40			کل تعداد

6.1(ii) کالمی نقشہ کی تشکیل: (Construction of Histogram)

کالمی نقشہ:

کالمی نقشہ متصلہ مستطیلوں کا گراف ہے جس کو XY- محور پر تشکیل دیا جاتا ہے۔ یہ تعددی تقسیم کا گراف ہے۔ عملی طور پر غیر مسلسل اور مسلسل تعددی تقسیم کو کالمی نقشہ کی مدد سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ بہر حال ان کی تشکیل کے طریقہ کار کو مثالوں کی مدد سے واضح کرتے ہیں۔

مساوی وقفوں والا کالمی نقشہ:

مثال 1: 5 سکّوں کو اچھالا گیا جس میں تعددی تقسیم ہیڈز کی تعداد کو ظاہر کر رہی ہے۔ مندرجہ ذیل تعددی تقسیم سے کالمی نقشہ بنائیں۔

تعددات	X (ہیڈز کتنی مرتبہ آیا)
1	0
3	1
8	2
5	3
3	4
1	5

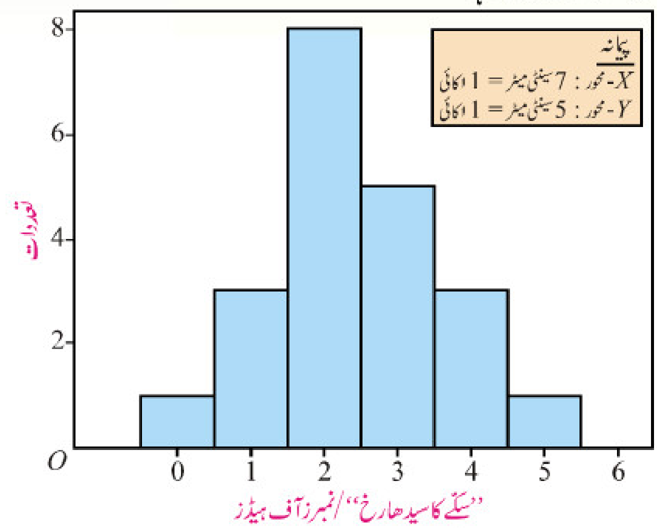
حل: کالمی نقشہ بنانے کے لیے ہم مندرجہ ذیل طریقہ کار اختیار کریں گے۔

(i) متغیر X کی قیمتوں کو دیکھتے ہوئے X- محور پر مناسب وقفے لے کر نشان لگائیں۔

(ii) مناسب پیمائش کو استعمال کرتے ہوئے Y- محور پر تعددات کے نشان لگائیں۔

(iii) ہر وقفے پر متغیر X کی قیمتوں کی متعلقہ تعدد سے مطابقت کر کے مستطیل کی اونچائی بنائیں۔

حاصل شدہ کالمی نقشہ درج ذیل ہے۔



مثال 2: مندرجہ ذیل مواد کی مدد سے کالمی نقشہ بنائیں۔

حقیقی جماعتی حدود	تعددات
−0.5 ––– 9.5	2
9.5 ––– 19.5	10
19.5 ––– 29.5	5
29.5 ––– 39.5	6
39.5 ––– 49.5	7
49.5 ––– 59.5	1

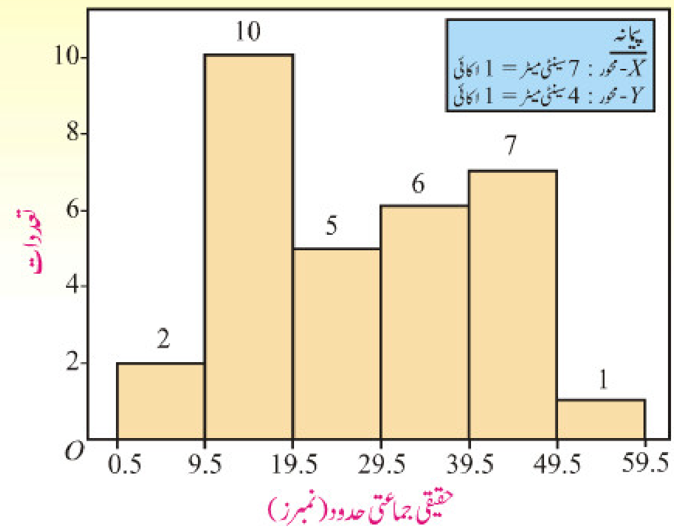
حل: چونکہ یہ ایک مسلسل تعددی تقسیم ہے لہٰذا ہم کالمی نقشہ مندرجہ ذیل طریقہ کار سے بنائیں گے۔

(i) X- محور پر مناسب پیمانہ لے کر حقیقی جماعتی حدود کا نشان لگائیں۔

(ii) Y- محور پر مناسب پیمانے کو استعمال کرتے ہوئے تعددات کا نشان لگائیں۔

(iii) ہر جماعتی وقفے پر اس گروپ کے متعلقہ تعدد تک مستطیل کی اونچائی بنائیں۔

کالمی نقشہ



نوٹ :

اوپر دیے گئے گراف میں 0.5– مثبت x-axis کی جانب صرف Histogram (کالمی گراف) کو بہتر سمجھنے کیلئے دیا گیا ہے۔

غیر مساوی وقفوں والا کالمی نقشہ :

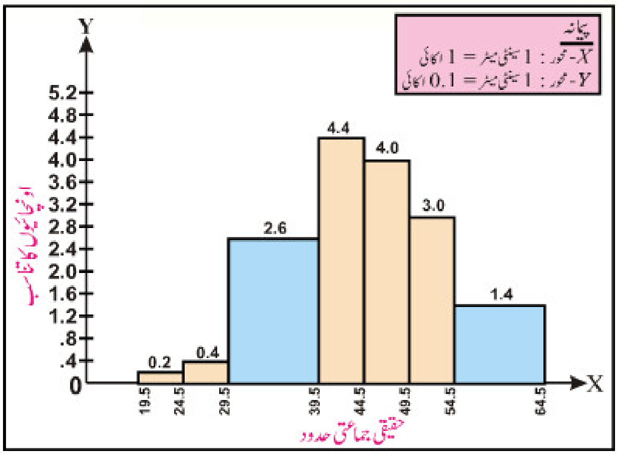
اگر جماعتی وقفے مساوی نہ ہوں تو ہر جماعتی تعدد کو اُس کے جماعتی وقفے کی جسامت پر تقسیم کر کے اونچائی (تعدد) کی تصحیح کی جاتی ہے۔ اگر وقفہ دو گنا ہو جائے تو تعدد کو 2 پر تقسیم کیا جاتا ہے تا کہ گوشوارے (گراف) کا رقبہ اور دوسرے گوشواروں کے رقبوں کا صحیح تناسب ہو سکے۔ وغیرہ۔

مثال 3 : مندرجہ ذیل مواد کا کالمی نقشہ بنائیں۔

عمریں	آدمیوں کی تعداد
20 --- 24	1
25 --- 29	2
30 --- 39	26
40 --- 44	22
45 --- 49	20
50 --- 54	15
55 --- 64	14

حل : جیسا کہ جماعتی وقفے غیر مساوی ہیں لہٰذا ہر مستطیل کی اونچائی کو تعدد کے مساوی نہیں کیا جا سکتا۔ اس لیے ہم ہر تعدد کو جماعتی وقفے کی جسامت پر تقسیم کر کے اونچائیوں میں صحیح تناسب حاصل کرتے ہیں۔ جیسا کہ مندرجہ ذیل جدول میں ظاہر کیا گیا ہے۔

عمریں	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی وقفہ (h)	تعدادات	اونچائیوں کا تناسب
20 — 24	19.5 — 24.5	5	1	$1 \div 5 = 0.20$
25 — 29	24.5 — 29.5	5	2	$2 \div 5 = 0.4$
30 — 39	29.5 — 39.5	10	26	$26 \div 10 = 2.6$
40 — 44	39.5 — 44.5	5	22	$22 \div 5 = 4.4$
45 — 49	44.5 — 49.5	5	20	$20 \div 5 = 4.0$
50 — 54	49.5 — 54.5	5	15	$15 \div 5 = 3.0$
55 — 64	54.5 — 64.5	10	14	$14 \div 10 = 1.4$



6.1(iii) تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل:(Construction of Frequency Polygon)

ایک تعددی کثیر الاضلاع کئی پہلوؤں (اطراف) سے بند دو العادی سطح (اقلیدس) ہے اس کی تشکیل کا طریقہ کار حسب ذیل ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد سے تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	تعدادات
10—19	9.5—19.5	10
20—29	19.5—29.5	5
30—39	29.5—39.5	9
40—49	39.5—49.5	6
50—59	49.5—59.5	7
60—69	59.5—69.5	1

حل:

اقدامات:

(i) دو ہم جسامتی وقفوں کے اضافی گروہ لیں۔ ایک پہلے گروہ سے پہلے اور دوسرا آخری گروہ کے بعد لیں۔ اور ان

دونوں گروہوں کے درمیانی نقاط معلوم کریں ان گروہوں کے سامنے تعدادات صفر ہیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	تعدادات
0 — 9	−0.5 — 9.5	0
10 — 19	9.5 — 19.5	10
20 — 29	19.5 — 29.5	5
30 — 39	29.5 — 39.5	9
40 — 49	39.5 — 49.5	6
50 — 59	49.5 — 59.5	7
60 — 69	59.5 — 69.5	1
70 — 79	69.5 — 79.5	0

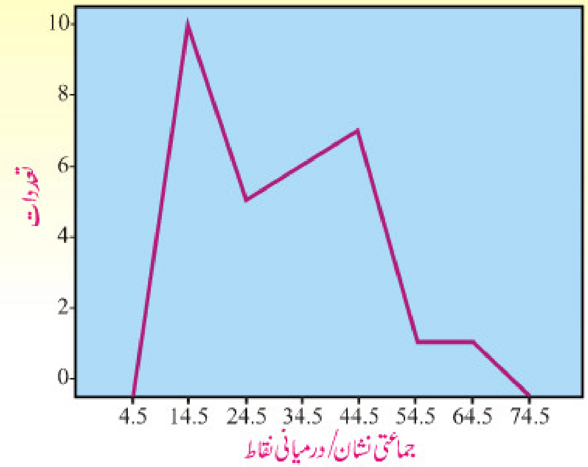
(ii) دی ہوئی تعداد ی تقسیم کے لیے جماعتی نشان یعنی درمیانی نقاط معلوم کریں۔

جماعتی نشان/درمیانی نقاط	تعدادات
4.5	0
14.5	10
24.5	5
34.5	9
44.5	6
54.5	7
64.5	1
74.5	0

(iii) X- محور پر درمیانی نقاط کی نشاندہی کریں اور مناسب پیمانہ مانتے ہوئے Y– محور پر تعدادات کو نوٹ کریں۔

(iv) ہر متعلقہ جماعتی نشان/درمیانی نقطہ کو تعدادات کے مدمقابل کسی نقطے سے خاکہ بنائیں۔

(v) ان تمام نقاط کو چھوٹی چھوٹی لائنوں سے آپس میں ملادیں۔



6.2 مجموعی تعددی تقسیم : (Cumulative Frequency Distribution)

6.2(i) مجموعی تعددی جدول کی تشکیل

ایک جدول جو بالائی جماعتی حدود کے مد مقابل مجموعی تعددات کو ظاہر کرے، مجموعی تعددی تقسیم کہلاتی ہے۔ یہ کم تر مجموعی تعددی تقسیم بھی کہلاتی ہے۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل مواد کے لیے مجموعی تعددی تقسیم بنائیں۔

جماعت/ گروہ	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49	50 – 54
تعددات	1	2	26	22	20	15	14

حل : مجموعی تعددی تقسیم کی تشکیل درج ذیل ہے۔

حقیقی جماعتی حدود	تعددات (f)	مجموعی تعددات	حقیقی جماعتی حدود	مجموعی تعددات
10.5 — 19.5	0	0	19.5 سے کم	0
19.5 — 24.5	1	0 + 1 = 1	24.5 سے کم	1
24.5 — 29.5	2	1 + 2 = 3	29.5 سے کم	3
29.5 — 34.5	26	3 + 26 = 29	34.5 سے کم	29
34.5 — 39.5	22	29 + 22 = 51	39.5 سے کم	51
39.5 — 44.5	20	51 + 20 = 71	44.5 سے کم	71
44.5 — 49.5	15	71 + 15 = 86	49.5 سے کم	86
49.5 — 54.5	14	86 + 14 = 100	54.5 سے کم	100

6.2(ii) مجموعی تعددی کثیر الاضلاع/ترسیم کی خاکہ کشی
(Cumulative Frequency Polygon/Ogive):

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع/ترسیم کی خاکہ کشی۔

اس میں مندرجہ ذیل اقدامات شامل ہیں۔

(i) حقیقی جماعتی حدود کی X- محور پر اور مجموعی تعدد کی Y- محور پر نشاندہی کریں۔

(ii) متعلقہ بالائی جماعتی حدود اور تعددات کو بذریعہ نشان درج کریں یا نوٹ کریں۔

(iii) ان تمام نقاط کو چھوٹی چھوٹی لائنوں سے ملائیے۔

(iv) آخری نقطہ سے ایک عمود X- محور پر گرا کر اُس تصویر کو بند کر دیں۔

مثال 2: دیے ہوئے مواد سے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنائیے۔

جماعتی حدود	تعددات
4 — 6	2
7 — 9	4
10 — 12	8
13 — 15	3

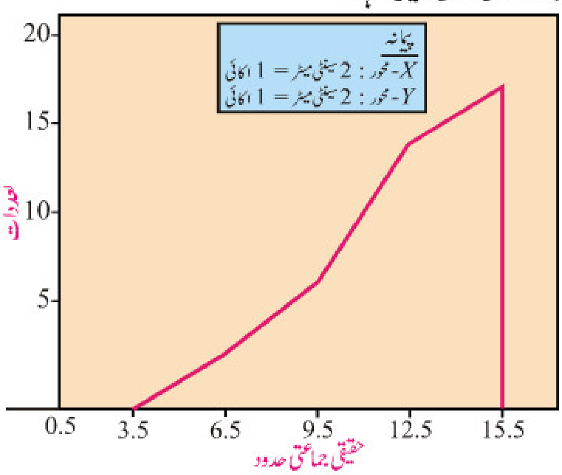
حل: سب سے پہلے ہم شروع میں ایک گروہ کا اضافہ کریں گے پھر ہم حقیقی جماعتی حدود بنائیں گے اور مجموعی تعددات کو بھی معلوم کریں گے۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	تعددات	مجموعی تعددات
1 — 3	**0.5 — 3.5**	**0**	**0**
4—6	3.5 — 6.5	2	0 + 2 = 2
7—9	6.5 — 9.5	4	2 + 4 = 6
10—12	9.5 — 12.5	8	6 + 8 = 14
13—15	12.5 — 15.5	3	14 + 3 = 17

اب ہم مندرجہ بالا تعددی تقسیم کو کم تر مجموعی تعددی تقسیم کی صورت میں مندرجہ ذیل طریقہ کار سے لکھیں گے۔

حقیقی جماعتی حدود	مجموعی تعددات
3.5 سے کم	0
6.5 سے کم	2
9.5 سے کم	6
12.5 سے کم	14
15.5 سے کم	17

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع درج ذیل ہے۔



مشق 6.1

-1 مندرجہ ذیل مواد مختلف خاندانوں میں افراد کی تعداد کو ظاہر کر رہا ہے۔ اس مواد کی مدد سے تعددی تقسیم تشکیل کریں اور مجموعی تعددات کو بھی معلوم کریں۔

9, 11, 4, 5, 6, 8, 4, 3, 7, 8, 5, 5, 8, 3, 4, 9, 12, 8, 9, 10, 6, 7, 7, 11, 4, 4, 8, 4, 3, 2, 7, 9, 10, 9, 7, 6, 9, 5, 7.

-2 مندرجہ ذیل مواد پنجم جماعت کے 40 طالبعلموں کا وزن کر کے حاصل کیا گیا ہے۔ جماعی وقفے کی جسامت '5' لے کر تعددی تقسیم تشکیل کریں۔ حقیقی جماعتی حدود اور درمیانی نقاط بھی معلوم کریں۔

34, 26, 33, 32, 24, 21, 37, 40, 41, 28, 28, 31, 33, 34, 37, 23, 27, 31, 31, 36, 29, 35, 36, 37, 38, 22, 27, 28, 29, 31, 35, 35, 40, 21, 32, 33, 27, 29, 30, 23.

اور مجموعی تعددی تقسیم بھی بنائیں۔

اشارہ: (جماعت اس طرح بنائیں ...... 29—25 ,24—20)

3- مندرجہ ذیل مواد ایک سکول کے تیس (30) اساتذہ کی تنخواہوں کو ظاہر کر رہا ہے۔100 روپے کا جماعتی وقفہ (جسامت) لے کر تعددی تقسیم بنائیں۔

450, 500, 550, 580, 670, 1200,1150, 1120, 950, 1130, 1230, 890, 780, 760, 670, 880, 890, 1050, 980, 970, 1020, 1130, 1220, 760, 690, 710, 750, 1120, 760, 1240.

اشارہ: (جماعت اس طرح بنائیں ...... ,649—550 ,549—450)

4- مندرجہ ذیل مواد کسی شہر کی (30) مقامی/مضافاتی جگہوں پر روزانہ بجلی کی لوڈشیڈنگ (تعطلی) کے دورانیے کے گھنٹوں کو ظاہر کرتا ہے۔لوڈشیڈنگ دورانیہ پر 2 گھنٹوں کا جماعتی وقفہ لے کر تعددی تقسیم بنائیں۔

6, 12, 5, 7, 8, 3, 6, 7, 10,2, 14, 11, 12, 8, 6, 8, 9, 7, 11, 6, 9, 12, 13, 10, 14, 7, 6, 10, 11, 14, 12.

اور مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

(i) زیادہ سے زیادہ لوڈشیڈنگ کے گھنٹے بتائیں۔

(ii) کم سے کم لوڈشیڈنگ کے وقفے بتائیں۔

اشارہ: (کلاس کا کالم اس طرح بنائیں .... ,7—6 ,5—4 ,3—2)

5- مندرجہ ذیل مواد جو کہ طالبعلموں کے اوزان (کلو گرام) ہیں اس مواد کے ذریعے کالمی نقشہ اور تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

وزن/اوزان	تعددات (طالبعلموں کی تعداد)
20—24	5
25—29	8
30—34	13
35—39	22
40—44	15
45—49	10
50—54	8

6.3 مرکزی رجحان کے پیمانے (Measures of Central Tendency)

تعارف:

ہم پڑھ چکے ہیں کہ مواد کو ایک جامع شکل میں تعددی تقسیم اور گرافی اظہار کے ساتھ پیش کیا گیا تو معلومات کو با آسانی سمجھ لیا گیا۔ مواد میں دی گئی معلومات کو ہم مزید مختصر طریقہ سے صرف ایک نمائندہ قدر کے ذریعے پیش کر سکتے ہیں۔ یہ مواد کے ارد گرد تقریباً مرکزی قیمت ہوتی ہے۔ یہ نمائندہ قدر متغیر کی تقسیم کے رجحان کو ظاہر کرتی ہے۔ اس قیمت کو اوسط یا مرکزی قیمت کہتے ہیں۔ مرکزی قیمت نکالنے کے لیے استعمال ہونے والے پیمانوں کو مرکزی رجحان کے پیمانے کہا جاتا ہے۔ عام طور پر مندرجہ ذیل مرکزی رجحان کے پیمانے استعمال کیے جاتے ہیں۔

-1 حسابی اوسط　　-2 وسطانیہ

-3 عادہ　　-4 اقلیدسی اوسط

-5 ہم آہنگ اوسط　　-6 چہارمی مقدار

ان پیمانوں کو مختلف صورتوں میں مواد کی نوعیت کے مطابق استعمال کیا جاتا ہے۔

6.3(i) (a) حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

حسابی اوسط وہ قیمت ہے جو تمام مدات کے مجموعہ کو مدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ پس حسابی اوسط کو $\bar{X}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے یوں معلوم کیا جاتا ہے۔

$$n = (\bar{X}) = \frac{\sum X}{n}$$ مدات کا حسابی اوسط

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\text{تمام مدات کا مجموعہ}}{\text{تمام مدات کی تعداد}}}$$

حسابی اوسط نکالنے کا طریقہ:

مواد کی دو اقسام ہیں۔ گروہی مواد اور غیر گروہی مواد۔ مواد کی ان دو اقسام کے لیے حسابی اوسط معلوم کرنے کے مختلف طریقے ہیں جن کی وضاحت مندرجہ ذیل اقسام سے کی جارہی ہے۔

غیر گروہی مواد:

غیر گروہی مواد سے حسابی اوسط نکالنے کے تین طریقے ہیں۔ اور وہ تین طریقے مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) براہِ راست طریقہ (تعریف کے مطابق) :

براہ راست طریقے میں ہم مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\text{تمام مدات کا مجموعہ}}{\text{تمام مدات کی تعداد}}$$

مثال 1: سات طالبعلموں نے ریاضی میں جو نمبرز لیے وہ مندرجہ ذیل ہیں۔ اس مواد کی مدد سے حسابی اوسط معلوم کریں اور جواب کی وضاحت / تشریح بھی کریں۔

طالبعلموں کی تعداد	1	2	3	4	5	6	7
حاصل کردہ نمبرز	45	60	74	58	65	63	49

حل: فرض کیا طالبعلم کے نمبرز $= X$

$$\bar{X} = \frac{\text{تمام مدات کا مجموعہ}}{\text{تمام مدات کی تعداد}} = \frac{\sum X}{n}$$

$$\text{حسابی اوسط } (\bar{X}) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_7}{7}$$

$$\text{حسابی اوسط} = \frac{45 + 60 + 74 + 58 + 65 + 63 + 49}{7} =$$

$$= \frac{414}{7} = 59.14 \text{ نمبرز}$$

وضاحت: چونکہ مواد کی اکائی نمبرز ہیں اس لیے جواب بھی نمبرز میں ہی ہو گا۔ لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ سات طالبعلموں میں سے ہر ایک طالبعلم نے اوسطاً 59 نمبرز لیے ہیں۔

(ii) بالواسطہ، مختصر یا کوڈنگ طریقہ:

بالواسطہ طریقے کے تحت حسابی اوسط کو نکالنے کے دو اصول ہیں۔ یہ اصول اس وقت استعمال کئے جاتے ہیں جب مواد یا تو بہت بڑی قیمتوں پر مشتمل ہو یا مدات کی تعداد بہت زیادہ ہو۔ اِن اصولوں کے تحت حسابی اوسط کو نکالنا نہایت آسان ہے۔ یہ اصول نظریاتی ہیں اور عملاً استعمال نہیں کئے جاتے کیونکہ بہت بڑے مواد سے حسابی اوسط نکالنے کے لئے شماریاتی سافٹ ویئر موجود ہیں۔ تاہم طالبعلموں کو ان اصولوں سے واقف ہونا ضروری ہے۔ وہ اصول مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) فرضی یا عارضی حسابی اوسط استعمال کرنا

(ii) فرضی یا عارضی حسابی اوسط استعمال کرنا اور متغیر کی پیمائش / سکیل کو تبدیل کرنا۔

متغیر کی پیمائش / سکیل کو تبدیل کر کے فرضی یا عارضی حسابی اوسط استعمال کرنا کسی متغیر کی قیمت اور مستقل مقدار 'A' کے فرق کو انحراف کہا جاتا ہے۔ مثلاً

$$X \text{ کے حسابی اوسط سے انحراف} = \left(x_i - \bar{X}\right) = (X_i - \bar{X}) \quad , \ i = 1, 2, \dots\dots n$$

$$\text{مستقل مقدار } A \text{ سے انحراف} = \left(x_i - A\right) = (X_i - A) \quad , \ i = 1, 2, \dots\dots n$$

مندرجہ ذیل فارمولے بالواسطہ طریقے کے تحت استعمال ہوتے ہیں۔

(i) $\bar{X} = A + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$ (ii) $\bar{X} = A + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} \times h$

یہاں پر

$D_i = (x_i - A)$، اور A کوئی فرضی قیمت ہے جو کہ فرضی یا عارضی اوسط کہلاتی ہے۔

اور $u_i = \dfrac{(x_i - A)}{h}$ جبکہ 'h' X کی غیر برابر قیمتوں کے حاصل ضرب والی مستقل مقدار ہے۔

مثال 2: پانچ (5) اساتذہ کی تنخواہیں درج ذیل ہیں۔ براہ راست طریقہ اور بالواسطہ طریقے کو استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط معلوم کریں اور ان کے جوابات کا موازنہ بھی کریں۔ 11500, 12400, 15000, 14500, 14800.

حل: براہِ راست طریقہ : (Direct Method)

$$\text{(حسابی اوسط)} \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{11500 + 12400 + 15000 + 14500 + 14800}{5}$$

$$= \frac{68200}{5} = 13640 \text{ روپے}$$

بالواسطہ طریقہ: (Indirect Method)

فرض کیا

$$A = 13{,}000$$
$$D_i = (x_i - 13{,}000)$$
$$h = 100$$
$$u_i = \frac{x_i - A}{100}$$

درج ذیل جدول حسابی اوسط نکالنے کے لیے درکار ہے۔

X	$D_i = (x_i - 13000)$	$u_i = \dfrac{(x_i - A)}{100}$
11500	−1500	−15
12400	−600	−6
15000	2000	20
14500	1500	15
14800	1800	18
$\Sigma x_i = 68200$	$\Sigma D_i = 3200$	$\Sigma u_i = 32$

(i) **مختصر طریقہ : (Short Method)**

$$\bar{X} = 13000 + \frac{3200}{5} = 13000 + 640 = 13640 \text{ روپے}$$

(ii) **کوڈنگ طریقہ : (Coding Method)**

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma u_i}{n} \times h$$

$$\bar{X} = 13000 + \frac{32}{5} \times 100 = 13640 \text{ روپے}$$

گروہی مواد:

تعددی تقسیم کی شکل میں مواد کو گروہی مواد کہا جاتا ہے۔ گروہی مواد کے لیے براہِ راست اور بالواسطہ طریقوں کے فارمولے مندرجہ ذیل ہیں۔

(a) براہِ راست طریقہ:

$$\bar{X} = \frac{\sum fx_i}{\sum f} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

(b) بالواسطہ طریقہ:

(i) $\bar{X} = A + \frac{\sum fD}{\sum f}$ (ii) $\bar{X} = A + \frac{\sum fu}{\sum f} \times h$

جبکہ '$X = x_i$' کسی کلاس یا گروہ کے درمیانی نقطے کو ظاہر کر رہا ہے اگر جماعتی وقفہ دیا ہوا ہو۔ اور 'h' جماعتی وقفے کی جسامت کو ظاہر کر رہا ہے۔

مثال 3: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے براہِ راست طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط معلوم کریں۔

(Heads' کی تعداد') X	تعددات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

حل: ہم حسابی اوسط مندرجہ ذیل طریقہ سے معلوم کریں گے۔

X	f	fX
1	3	3
2	8	16
3	5	15
4	3	12
5	1	5
کل تعداد	$\Sigma f = 20$	$\Sigma fX = 49$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{49}{20} = 2.45 \quad \text{یا} \quad 3 \text{ Heads}$$

(چونکہ Head غیر مسلسل متغیر ہے)

مثال 4: مندرجہ ذیل مواد ٹافی کے ڈبوں کے وزن (گرام) کو ظاہر کر رہا ہے۔ ان ڈبوں کے وزن کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

جماعت / گروہ اوزان (گراموں میں)	تعدادات
0 —— 9	2
10 —— 19	10
20 —— 29	5
30 —— 39	9
40 —— 49	6
50 —— 59	7
60 —— 69	1
کل تعداد	$\Sigma f = 40$

حل : سب سے پہلے ہم ہر گروہ کا درمیانی نقطہ معلوم کریں گے اور پھر حسابی اوسط معلوم کریں گے۔

جماعت/گروہ اوزان (گراموں میں)	تعدادات f	درمیانی نقاط (X)	fX
0 ---- 9	2	4.5	9
10 ---- 19	10	14.5	145
20 ---- 29	5	24.5	122.5
30 ---- 39	9	34.5	310.5
40 ---- 49	6	44.5	267
50 ---- 59	7	54.5	381.5
60 ---- 69	1	64.5	64.5
کل تعداد	$\sum f = 40$		$\sum fX = 1300$

$$\text{(حسابی اوسط)}\ \bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{1300}{40} = 32.5\ \text{گرام}$$

مثال 5 : مثال نمبر 4 کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے عارضی حسابی اوسط کی قیمت $X = 34.5$ لے کر مختصر فارمولا سے حسابی اوسط معلوم کریں۔

حل : ہم مندرجہ ذیل فارمولے استعمال کریں گے۔

$$\text{(i)} \qquad \bar{X} = A + \frac{\sum fD}{\sum f} \qquad\qquad \text{(ii)} \qquad \bar{X} = A + \frac{\sum fu}{\sum f} \times h$$

جیسا کہ ہمیں بتایا گیا ہے $A = 34.5$ اور ہم نے دیکھا کہ تعددی تقسیم میں ہر جماعتی وقفے کی جسامت '10' ہے لہٰذا ہم $h = 10$ لیتے ہیں اور ہم مندرجہ ذیل طریقے سے جدول بناتے ہیں۔

جماعت/گروہ	تعدادات f	X	$D = X - 34.5$	$u = (X - A)/10$	fD	fu
0 ---- 9	2	4.5	−30	−3	−60	−6
10 ---- 19	10	14.5	−20	−2	−200	−20
20 ---- 29	5	24.5	−10	−1	−50	−5
30 ---- 39	9	34.5	0	0	0	0
40 ---- 49	6	44.5	10	1	60	6
50 ---- 59	7	54.5	20	2	140	14
60 ---- 69	1	64.5	30	3	30	3
کل تعداد	40				$\Sigma fD = -80$	$\Sigma fu = -8$

اوپر والے فارمولوں میں قیمتیں درج کرنے سے

(i) $\bar{X} = 34.5 + \frac{-80}{40} = 34.5 - 2 = 32.5$ گرام

(ii) $\bar{X} = 34.5 + \frac{-8}{40} \times 10 = 34.5 - 2 = 32.5$ گرام

لہٰذا تینوں طریقوں سے جواب ایک جیسا ہے۔

6.3(i) (b) وسطانیہ : (Median)

جب مواد کسی ترتیب یعنی بڑھتی یا گھٹتی ہوئی صورت میں ہو تو وسطانیہ وہ قدر ہے جو اس پورے مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کر دے (یعنی مواد کا پچاس فیصد حصہ وسطانی قدر سے پہلے اور پچاس فیصد وسطانی قدر کے بعد ہوتا ہے)۔ وسطانیہ کو '$\tilde{X}$' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم وسطانیہ نکالنے کے لیے مندرجہ ذیل فارمولے استعمال کرتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

(i) ترتیب دیے ہوئے مواد میں جب مدات کی تعداد طاق ہو تو وسطانیہ مندرجہ ذیل فارمولے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\boxed{\tilde{X} = \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ویں قدر}}$$

(ii) ترتیب دیے ہوئے مواد میں جب مدات کی تعداد جفت ہو تو وسطانیہ درمیانی مدات کا حسابی اوسط ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وسطانیہ $\frac{n}{2}$ ویں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں قدر کا حسابی اوسط ہے۔

$$\tilde{X} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2} \text{ویں قدر} + \frac{n}{2}+1 \text{ویں قدر}\right]$$

مثال 1: ریاضی کے پانچ ٹرموں کے ٹیسٹ میں ایک طالبعلم نے مندرجہ ذیل نمبرز لیے۔
82, 93, 86, 92 اور 79 نمبروں کے لیے وسطانیہ معلوم کریں۔

حل: گریڈز کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے

79, 82, 86, 92, 93

چونکہ مدات کی تعداد طاق ہے $n = 5$

لہٰذا

$$\tilde{X} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ویں قدر}$$

$$\tilde{X} = \left(\frac{5+1}{2}\right) \text{ویں قدر}$$

$\tilde{X} =$ تیسری قدر

$\tilde{X} = 86$

مثال 2: مختلف برینڈ کے چھ جوس کے پیک میں چینی کی مقدار ملی گراموں میں درج ذیل پائی گئی۔

1.9 اور 3.1, 2.9, 2.5, 2.7, 2.3 وسطانیہ معلوم کریں۔

حل: مواد کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے

1.9, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 3.1

چونکہ مدات کی تعداد جفت ہے یعنی $n = 6$

$$\tilde{X} = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{2}\text{ ویں قدر} + \frac{6}{2}+1\text{ ویں قدر}\right]$$

$$\tilde{X} = \frac{1}{2}\left[\text{تیسری قدر} + \text{چوتھی قدر}\right]$$

$$\tilde{X} = \frac{2.5 + 2.7}{2} = 2.6 \text{ ملی گرام}$$

گروہی مواد (غیر مسلسل):

غیر مسلسل گروہی مواد کے لیے وسطانیہ مندرجہ ذیل طریقے سے نکالا جاتا ہے۔

- مجموعی تعددی تقسیم کا کالم بنائیں۔
- مجموعی تعددی تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے وسطانی قدر معلوم کریں یعنی ایسی کلاس/گروہ جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں قدر رکھتا ہو۔

مثال 3: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے وسطانیہ معلوم کریں۔

X	تعددات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

حل: ہم مجموعی تعددی تقسیم کا کالم مندرجہ ذیل طریقے سے بنائیں گے۔

X	تعددات	مجموعی تعددات
1	3	3
2	8	11
3	5	16
4	3	19
5	1	20
کل تعداد	$\Sigma f = 20$	

اب

ایسا گروہ جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں قدر رکھتا ہو = وسطانیہ

ایسا گروہ جو $\left(\frac{20}{2}\right)$ ویں قدر رکھتا ہو = وسطانیہ

ایسا گروہ/جماعت جو 10 ویں قدر رکھتا ہو = وسطانیہ

2 = وسطانیہ

گروہی مواد (مسلسل):

مسلسل گروہی مواد کے ئے وسطانیہ درج ذیل طریقے سے نکالا جاتا ہے۔

- حقیقی جماعتی حدود نکالی جائیں۔
- مجموعی تعددی تقسیم کا کالم تشکیل دیں۔
- مجموعی تعددی تقسیم سے وسطانی جماعت معلوم کریں یعنی وہ جماعت جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں قدر رکھتی ہو۔
- اس کے لیے مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کریں۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \frac{h}{f}\left\{\frac{n}{2} - c\right\}$$

جہاں

l : وسطانی جماعت کی زیریں جماعتی حدود

h : وسطانی جماعت کے جماعتی وقفے کی جسامت

f : وسطانی جماعت کی تعدد

c : وسطانی جماعت سے پچھلی جماعت کا مجموعی تعدد

مثال 4: چالیس (40) طالبعلموں نے ایک سوال کو حل کرنے میں جتنا وقت صَرف کیا مندرجہ ذیل مواد اُس وقت کو ظاہر کررہا ہے۔ اس مواد کی مدد سے وسطانیہ معلوم کریں۔

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

حل:

(*a*)

جماعتی وقفے	تعددات	حقیقی جماعتی حدود	مجموعی تعددات
118 — 126	3	117.5 – 126.5	3
127 — 135	5	126.5 – 135.5	8
136 — 144	9	135.5 – 144.5	17
145 — 153	12	144.5 – 153.5	29
154 — 162	5	153.5 – 162.5	34
163 — 171	4	162.5 – 171.5	38
172 — 180	2	171.5 – 180.5	40
کل تعداد	$\Sigma f = 40$	—	—

وسطانی جماعت

لہٰذا

$$\text{وسطانیہ } (\tilde{X}) = l + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

جہاں $20 = \frac{40}{2} = \frac{n}{2}$ ۔ چونکہ وسطانیہ وہ قدر ہوتی ہے جو مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے یعنی مواد کا (50) پچاس فیصد حصہ وسطانیہ قدر سے پہلے اور پچاس فیصد حصہ وسطانی قدر کے بعد ہوتا ہے۔ چونکہ پہلی تین تعددات کا اور پہلی چار تعددات کا مجموعہ بالترتیب $17 = 9 + 5 + 3$ اور $29 = 12 + 9 + 5 + 3$ ہے یہ بات صاف ظاہر ہے کہ وسطانی جماعت چوتھی جماعت میں لہٰذا

$l =$ وسطانی جماعت کی زیریں جماعتی حد $= 144.5$

$c =$ وسطانی جماعت سے پچھلی مجموعی تعدد $= 17$

$f =$ وسطانی جماعت کا تعدد $= 12$

$h =$ وسطانی جماعت کے جماعتی وقفے کی جسامت $= 9$

وسطانیہ $(\tilde{x}) = l + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 144.5 + \frac{9}{12}(20 - 17)$

وسطانیہ $= 146.8$

6.3(i) (c) عادہ (Mode)

کسی سلسلہ یا مواد میں وہ قیمت جو سب سے زیادہ بار آئے عادہ کہلاتی ہے۔ عادہ کو نکالنے کے لیے مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کیا جاتا ہے۔

(الف) غیر گروہی مواد اور غیر مسلسل گروہی مواد
(Ungrouped Data and Discrete Grouped Data)

مواد میں زیادہ بار آنے والی مد = عادہ

(ب) گروہی مواد (مسلسل) Grouped Data (Continuous)

گروہی مواد کے تحت عادہ کو نکالنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدامات کیے جاتے ہیں۔

ایسا گروہ معلوم کریں جس کے سامنے سے بڑا تعدد ہو۔

مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کریں۔

$$\boxed{\text{عادہ} = l + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h}$$

جہاں

عادہ گروہ/جماعت کی حقیقی زیریں حد : l

عادہ گروہ میں جماعتی وقفہ کی جسامت : h

سب سے زیادہ تعدد رکھنے والے گروہ کا تعدد یعنی عادہ گروہ کا تعدد : f_m

عادہ گروہ سے پہلے والے گروہ کا تعدد : f_1

عادہ گروہ کے بعد والے گروہ کا تعدد : f_2

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد جوتوں کی جسامت کو ظاہر کر رہا ہے اس مواد کی مدد سے عادہ معلوم کریں۔

4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 5, 7.5, 8, 8, 8, 6, 5, 6, 5, 7

حل: ہم نے مواد میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت کو دیکھا اور معلوم کیا کہ

عادہ $= 6$

مثال 2: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے عادہ معلوم کریں۔

X (ہیڈز کی تعداد)	تعددات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

حل: چونکہ دیا ہوا مواد غیر مسلسل گروہی مواد ہے لہٰذا

$2 =$ عادہ

(چونکہ $X = 2$ کے لئے تعدد سب سے بڑا ہے یعنی "2 ہیڈز" سب سے زیادہ تعداد دفعہ 8 مرتبہ آیا ہے۔)

مثال 3: مندرجہ ذیل مواد ٹافی کے ڈبوں کا اوزان (گراموں میں) ظاہر کر رہا ہے۔ عادہ معلوم کریں۔

جماعت/گروہ	تعددات
0 —— 9	2
10 —— 19	10
20 —— 29	5
30 —— 39	9
40 —— 49	6
50 —— 59	7
60 —— 69	1

حل: چونکہ یہ مسلسل گروہی مواد ہے لہٰذا ہم اس کا عادہ درج ذیل طریقہ سے نکالیں گے۔

(الف) سب سے پہلے حقیقی جماعتی حدود معلوم کریں۔

(ب) سب سے بڑا تعدد رکھنے والا گروہ معلوم کریں۔

گروہ/جماعت	حقیقی جماعتی حدود	تعدادات (f)
0 ---- 9	−0.5 ---- 9.5	2
10 ---- 19	9.5 ---- 19.5	10 → عادہ گروہ
20 ---- 29	19.5 ---- 29.5	5
30 ---- 39	29.5 ---- 39.5	9
40 ---- 49	39.5 ---- 49.5	6
50 ---- 59	49.5 ---- 59.5	7
60 ---- 69	59.5 ---- 69.5	1
کل تعداد		$\Sigma f = 40$

مندرجہ بالا جدول سے ہم نے دیکھا

عادہ گروہ $= 9.5 - 19.5$

$f_m = 10\ ,\ l = 9.5\ ,\ h = 10$

$f_1 = 2$ اور $f_2 = 5$

عادہ $= l + \dfrac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$

عادہ $= 9.5 + \dfrac{10-2}{2(10)-2-5} \times 10$

عادہ $= 9.5 + \dfrac{80}{13} = 9.5 + 6.134$

$= 15.654$ گرام

(d) 6.3(i) اقلیدسی اوسط (Geometric Mean)

کسی متغیر X کی اقلیدسی اوسط سے مراد n-مدات $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ کے حاصل ضرب کا n^{th} مثبت رُوٹ (Root) ہے۔ علامتی طور پر ہم اسے یوں لکھیں گے۔

اقلیدسی اوسط $(\text{G.M.}) = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_n)^{1/n}$

مندرجہ بالا فارمولا لوگارتھم کو استعمال کرتے ہوئے یوں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے

$$\boxed{\text{G.M.} = Anti\ \log\left(\frac{\sum \log X}{n}\right)}$$

گروہی مواد کے لیے

$$\boxed{\text{G.M.} = Anti\ \log\left(\frac{\sum f \log X}{\sum f}\right)}$$

مثال 1: مدات 8 ,4 ,2 کے لئے اقلیدسی اوسط معلوم کریں۔ بذریعہ

(الف) بنیادی فارمولا کی مدد سے

(ب) لوگارتھم فارمولا کی مدد سے

حل: (الف) بنیادی فارمولا کو استعمال کرتے ہوئے

$$\text{اقلیدسی اوسط (G.M)} = (2 \times 4 \times 8)^{1/3} = (64)^{1/3} = 4$$

(ب) لوگارتھم فارمولا کو استعمال کرتے ہوئے

X	$\log X$
2	0.3010
4	0.6021
8	0.9031
کل تعداد	$\Sigma \log X = 1.8062$

$$\text{اقلیدسی اوسط (G.M)} = \text{Anti-log}\left(\frac{1.8062}{3}\right)$$

$$= \text{Anti-log}\,(0.6021) = 4.00003 = 4$$

مثال 2: مندرجہ ذیل مواد کی مدد سے اقلیدسی اوسط معلوم کریں۔

نمبر (فیصد)	تعددات (طالبعلموں کی تعداد)
33 ---- 40	28
41 ---- 50	31
51 ---- 60	12
61 ---- 70	9
71 ---- 75	5

حل:

گروہ	تعددات (f)	X	$\log X$	$f \log X$
33 ---- 40	28	36.5	1.562293	43.7442
41 ---- 50	31	45.5	1.658011	51.39835
51 ---- 60	12	55.5	1.744293	20.93152
61 ---- 70	9	65.5	1.816241	16.34617
71 ---- 75	5	73	1.863323	9.316614
کل تعداد	$\Sigma f = 85$			$\Sigma f \log X = 141.7369$

$$\text{اقلیدسی اوسط (G.M)} = \text{Anti-log}\left(\frac{\Sigma f \log X}{\Sigma f}\right)$$

$$\text{G.M} = \text{Anti-log}\left(\frac{141.7369}{85}\right)$$

$$= \text{Anti-log}\ (1.66749) = 46.50 \text{ فیصد نمبر}$$

6.3(i) (e) ہم آہنگ اوسط (Harmonic Mean)

ہم آہنگ اوسط وہ قیمت ہے جو n-مقدارات $x_1, x_2, ..., x_n$ کے معکوس یعنی $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$ کا معکوس وسط ہے۔

علامتی طور پر اسے مندرجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے فارمولا

$$\text{ہم آہنگ اوسط (H.M)} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X}}$$

گروہی مواد کے لیے فارمولا

$$\text{ہم آہنگ اوسط (H.M)} = \frac{n}{\sum \frac{f}{X}}$$

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد کے لیے ہم آہنگ اوسط معلوم کریں۔

X	12	5	8	4

حل:

X	$1/X$
12	0.0833
5	0.2
8	0.125
4	0.25
کل تعداد	0.6583

$$\text{H.M} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X}} = \frac{4}{0.6583} = 6.076$$

مثال 2: مندرجہ ذیل مواد کو استعمال کرتے ہوئے ہم آہنگ اوسط معلوم کریں۔

گروہ/جماعت	طالبعلموں کی تعداد
33 ---- 40	28
41 ---- 50	31
51 ---- 60	12
61 ---- 70	9
71 ---- 75	5

حل:

جماعت	تعدادات (f)	X	f/X
33 ---- 40	28	36.5	0.767123
41 ---- 50	31	45.5	0.681319
51 ---- 60	12	55.5	0.216216
61 ---- 70	9	65.5	0.137405
71 ---- 75	5	73	0.068493
کل تعداد	$\Sigma f = 85$		$\frac{\Sigma f}{X} = 1.870556$

$$\text{H.M} = \frac{\Sigma f}{\Sigma \frac{f}{X}} = \frac{85}{1.870556} = 45.441$$ (ہم آہنگ اوسط)

حسابی اوسط کی خصوصیات : (Properties of Arithmetic Mean)

(الف) ایک جیسی مدات مثلاً مستقل مقدار 'k' کا حامل متغیر کا حسابی اوسط بھی وہی مستقل مقدار 'k' ہی ہوتا ہے۔

(ب) مرکز کی تبدیلی حسابی اوسط پر اثر انداز ہوتی ہے۔

(ج) سکیل کی تبدیلی بھی حسابی اوسط پر اثر انداز ہوتی ہے۔

(د) متغیر x کا اس کے حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل مدات کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

34, 34, 34, 34, 34, 34

حل: کیونکہ متغیر X کی تمام مدات ایک جیسی ہیں لہٰذا پہلی خصوصیت کے مطابق

حسابی اوسط $= 34$

مثال 2: متغیر X کی قیمتیں مندرجہ ذیل ہیں۔ 4, 5, 8, 6, 2

X کا حسابی اوسط معلوم کریں۔ اور حسابی اوسط معلوم کریں جب

(ا) ہندسہ پانچ کو ہر مد میں جمع کریں۔

(ب) ہندسہ 10 کو ہر مد سے ضرب دیں۔

(ج) ثابت کریں حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ صفر ہے۔

حل : 'X' کی دی ہوئی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

X: 4 5 8 6 2.

ہم یہاں (ا) اور (ب) کے لیے بالترتیب دو متغیر X اور Y کا تعارف کروائیں گے اس لیے درج ذیل جدول تشکیل دیا جائے گا۔

لہٰذا

$(a) \quad Y = X + 5$

$(b) \quad Z = 10X$

	X	$Y = X + 5$	$Z = 10X$	$X - \bar{X}$
	4	9	40	-1
	5	10	50	0
	8	13	80	3
	6	11	60	1
	2	7	20	-3
کل تعداد	$\Sigma X = 25$	$\Sigma Y = 50$	$\Sigma Z = 250$	$\sum\left(X - \bar{X}\right) = 0$

اوپر والے جدول کے مطابق

$$\bar{X} = \frac{25}{5} = 5 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{50}{5} = 10 \quad ; \quad \bar{Z} = \frac{250}{5} = 50$$

ہم نے نوٹ کیا کہ

(ا) $\bar{Y} = 10 = 5 + 5 = \bar{X} + 5$

(ب) $\bar{Z} = 50 = 10\ (5) = 10\bar{X}$

جو کہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ حسابی اوسط مرکز اور سکیل کے تبدیل ہونے سے اثر انداز ہوتی ہے۔

(ج) جدول کے آخری کالم کے مطابق $\sum\left(X - \bar{X}\right) = 0$ یعنی حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ صفر ہے۔

6.3(iii) وزنی حسابی اوسط اور حرکتی (حسابی) اوسط کے نکالنے کا طریقہ

(الف) وزنی حسابی اوسط : (Weighted Arithmetic Mean)

کسی نمبر کی نسبتاً اہمیت اس کا وزن کہلاتی ہے۔ جب نمبرز $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر اہمیت کے حامل نہ ہوں تو ہم انہیں مختلف اوزان $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ کے ذریعے ان کی اہمیت کے مطابق ملا دیتے ہیں۔

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$\bar{x}_w$ وزنی حسابی اوسط کہلاتا ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد کا جدول ماہانہ آمدنی اور کسی فیکٹری میں ملازمین کی تعداد کو ظاہر کر رہا ہے۔ اس مواد کی مدد سے وزنی حسابی اوسط معلوم کریں۔

ملازمین کی تعداد	ماہانہ آمدنی (روپے)
4	800
22	45
20	100
30	30
80	35
300	15

حل: اوپر دی گئی معلومات میں ملازمین کی تعداد وزن (w) اور ماہانہ آمدنی متغیر (x) ہے۔

ملازمین کی تعداد (w)	ماہانہ آمدنی (x) (روپے)	xw
4	800	3200
22	45	990
20	100	2000
30	30	900
80	35	2800
300	15	4500
$\Sigma w = 456$	——	$\Sigma xw = 14390$

$$\bar{x}_w = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{14390}{456} = 31.5$$

(ب) حرکتی اوسط : (Moving Average)

حرکتی اوسط کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ مسلسل اوسط (حسابی اوسط) جو کہ ایک ہی وقت میں یا مہینوں یا سالوں کے تسلسل کے لئے معلوم کی جاتی ہے۔ اگر ہم 3 دن کی حرکتی اوسط معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم پہلے 3 دن کی حسابی اوسط معلوم کریں گے پھر ہم پہلے دن کو چھوڑ کر لگاتار بعد میں آنے والے دن کو اس گروہ میں جمع کریں گے۔ ہر تین دنوں کی اوسط کو ان تین دنوں کے درمیان والی جگہ کے مدمقابل لکھیں گے۔ یہ عمل تب تک جاری رہے گا جب تک تمام دن یعنی پہلے دن سے آخری دن تک ختم نہ ہو جائیں۔

مثال 2: مندرجہ ذیل حاضری کے ریکارڈ سے تین دن کی حرکتی اوسط معلوم کریں۔

Week	اتوار	پیر	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	ہفتہ
1	24	55	28	45	51	54	60

حل:

ہفتے اور دن	حاضری	تین۔دن حرکتی اوسط	
		کل تعداد	اوسط
اتوار	24	—	—
پیر	55	107	107/3 = 35.67
منگل	28	128	128/3 = 42.67
بدھ	45	124	124/3 = 41.33
جمعرات	51	150	150/3 = 50.00
جمعہ	54	165	165/3 = 55.00
ہفتہ	60	—	—

پہلی تین قیمتوں کو جمع کر کے 107 آیا جو کہ ان تین قیمتوں کے درمیان لکھا گیا یعنی پیر کے مدمقابل اور پھر پہلی قیمت یعنی 24 کو گرا دیا گیا اور اگلی تین قیمتوں کو جمع کر کے حاصل جمع 128 حاصل ہوا جسے ان تین قیمتوں کے درمیان میں لکھا گیا۔ اسی طرح آگے بھی عمل کیا گیا۔ اور اوسط کے لئے کل تعداد/میزان کو 3 پر تقسیم کر کے جدول کے آخری کالم میں لکھ دیا گیا ہے۔

6.3(iv) وسطانیہ، چہارمی حصّہ اور عادہ کا گرافی اظہار
(Graphical Location of Median, Quartiles and Mode):

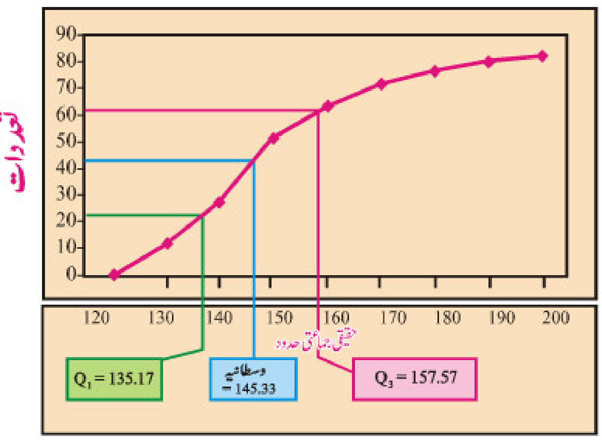
ہم وسطانیہ، چہارمی حصہ اور عادہ کے گراف کو درج ذیل مثالوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے وسطانیہ اور چہارمی حصہ کی گراف پر نشاندہی کریں۔

حقیقی جماعتی حدود	مجموعی تعددات
120 سے کم	0
130 سے کم	12
140 سے کم	27
150 سے کم	51

160 سے کم	64
170 سے کم	71
180 سے کم	76
190 سے کم	80
200 سے کم	82

حل: ہم وسطانیہ اور چہارمی حصہ کی گراف پر نشاندہی کے لیے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کو استعمال کریں۔



پیمانہ
X-محور : ایک چھوٹا سکیل = 10
Y-محور : 5 چھوٹے سکیل = 1

Q_1 معلوم کرنے کے لیے

(الف) $\left(\frac{n}{4}\right)$ ویں مد معلوم کریں جو کہ $\frac{82}{4} = 20.5$ ہے۔

(ب) Y- محور پر 20.5 کی گراف پر نشاندہی کریں اور y- محور (y-axis) سے افقی لائن کھینچیں جو کہ x- محور (x-axis) کے متوازی ہو اور کثیر الاضلاع کو چھوئے۔

(ج) اُس نقطے سے ایک عمودی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کو چھوئے۔

(د) پہلے چوتھائی حصے Q_1 کی قیمت نوٹ کریں جہاں پر لائن X- محور کو ملتی ہے جو کہ 135.17 ہے۔

Q_2 یا وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے

(الف) $2\left(\frac{n}{4}\right)$ ویں مد معلوم کریں جو کہ $41 = 2\left(\frac{82}{4}\right)$ ہے۔

(ب) گراف کے Y- محور پر 41 کی نشاندہی کریں اور Y- محور سے افقی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کے متوازی ہو اور کثیر الاضلاع کو چھوئے۔

(ج) اُس نقطے سے ایک عمودی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کو چھوئے۔

(د) وسطانیے کی قیمت نوٹ کریں جہاں پر لائن X- محور کو ملتی ہے جو کہ 145.33 ہے۔

Q_3 معلوم کرنے کے لیے

(الف) $3\left(\frac{n}{4}\right)$ ویں مد معلوم کریں جو کہ $3\left(\frac{82}{4}\right) = 61.5$ ہے۔

(ب) Y- محور پر 61.5 کی گراف پر نشاندہی کریں اور Y- محور سے افقی لائن کھینچیں جو X- محور کے متوازی ہو اور کثیر الاضلاع کو چھوئے۔

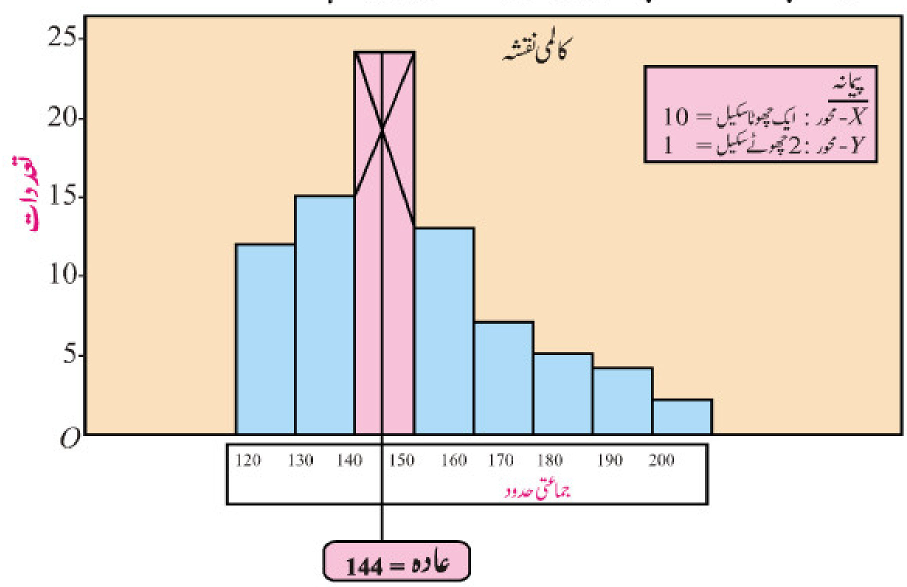
(ج) اس نقطے سے ایک عمودی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کو چھوئے۔

(د) Q_3 کی قیمت نوٹ کریں جہاں پر لائن X- محور کو ملتی ہے جو کہ 157.57 ہے۔

مثال 2: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کی مدد سے عادہ کی گراف پر نشاندہی کریں۔

تنخواہیں (روپے)	اساتذہ کی تعداد
120 —— 130	12
130 —— 140	15
140 —— 150	24
150 —— 160	13
160 —— 170	7
170 —— 180	5
180 —— 190	4
190 —— 200	2

حل: کالمی نقشہ پر عادہ کو X- محور پر درج ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



اقدامات:

(i) سب سے اونچی مستطیل معلوم کریں جو عادہ جماعت / گروہ کو ظاہر کرتی ہے۔

(ii) اس مستطیل کے اوپر والے بائیں کونے سے ایک لائن اگلی مستطیل کے بائیں اوپر والے کونے کی طرف کھینچیں۔

(iii) اسی طرح اس مستطیل کے اوپر والے دائیں کونے سے ایک لائن پچھلی مستطیل کے دائیں اوپر والے کونے کی طرف کھینچیں۔

(iv) اس مستطیل کے اوپر والے سرے سے ایک عمود X- محور پر گرائیں جو ان دونوں لائنوں کے ہم تقاطع نقطہ سے ہوتا آئے۔

(v) جہاں پر وہ عمود X- محور پر ملتا ہے اس نقطے کی قیمت نوٹ کریں۔ یہی اس مواد کا عادہ کہلائے گا جو کہ دیے ہوئے مواد میں 144 ہے۔

مشق 6.2

-1 مرکزی رجحان کے پیمانے کے بارے میں آپ کیا جانتے ہیں؟ بیان کریں۔

-2 حسابی اوسط، اقلیدسی اوسط، ہم آہنگ اوسط، وسطانیہ اور عادہ کی تعریف لکھیں۔

-3 بلاواسطہ / تعریفی طریقہ سے مندرجہ ذیل مواد کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i) 12, 14, 17, 20, 24, 29, 35, 45.

(ii) 200, 225, 350, 375, 270, 320, 290.

-4 بالواسطہ (مختصر / کوڈنگ) طریقہ سے مندرجہ بالا سوال نمبر 3 کا مواد استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط معلوم کریں۔

-5 گیارہویں جماعت میں طالبعلموں نے ریاضی میں جو نمبرز لیے وہ حسب ذیل ہیں۔ بلاواسطہ اور بالواسطہ طریقوں سے حسابی اوسط معلوم کریں۔

تعددات	جماعت / گروہ
2	0—9
10	10—19
5	20—29
9	30—39
6	40—49
7	50—59
1	60—69

-6 مندرجہ ذیل مواد کسی سکول کے بچوں کی عمر کو ظاہر کر رہا ہے بلاواسطہ اور مختصر طریقہ سے فرضی اوسط لے کر حسابی اوسط معلوم کریں۔(اشارہ $A = 8$ لیں)

جماعتی حدود	تعدادات
4—6	10
7—9	20
10—12	13
13—15	7
کل تعداد	50

اور اقلیدسی اوسط اور ہم آہنگ اوسط بھی معلوم کریں۔

-7 مندرجہ ذیل مواد مختلف خاندانوں میں بچوں کی تعداد کو ظاہر کر رہا ہے۔ وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

9, 11, 4, 5, 6, 8, 4, 3, 7, 8, 5, 5, 8, 3, 4, 9, 12, 8, 9, 10, 6, 7, 7, 11, 4, 4, 8, 4, 3, 2, 7, 9, 10, 9, 7, 6, 9, 5.

-8 جب پانچ سکّوں کو اچھالا گیا تو مندرجہ ذیل تعددی تقسیم ہیڈز کی تعداد کو ظاہر کر رہی ہے۔ عادہ معلوم کریں اور وسطانیہ بھی معلوم کریں۔

X (ہیڈز کی تعداد)	تعدادات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

-9 مندرجہ ذیل مواد لڑکوں کے اوزان (کلو گرام) کو ظاہر کر رہا ہے۔ حسابی اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

جماعتی وقفہ	تعدادات
1—3	2
4—6	3
7—9	5
10—12	4
13—15	6
16—18	2
19—21	1

-10 ایک طالبعلم نے امتحان میں مندرجہ ذیل نمبرز لیے۔

انگلش 73، اردو 82، ریاضی 80، تاریخ 67 اور سائنس 62

(الف) اگر اوزان ان نمبروں کے مطابق بالترتیب 4, 3, 3, 2اور 2 ہوں تو مناسب اوسط نمبر کیا ہو گا؟

(ب) اگر مساوی اوزان لیے جائیں تو اوسط نمبر کیا ہو گا؟

-11 چھٹیوں میں سیر و تفریح پر جانے والے ایک خاندان نے 21.3 لٹر پٹرول 39.90 روپے فی لٹر، 18.7 لٹر پٹرول 42.90 روپے فی لٹر اور 23.5 لٹر پٹرول 40.90 روپے فی لٹر میں خریدا۔ پٹرول کی اوسط فی لٹر قیمت معلوم کریں۔

-12 مندرجہ ذیل مواد کی مدد سے سادہ حرکتی اوسط معلوم کریں۔

سال	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
قیمتیں	102	108	130	140	158	180	196	210	220	230

-13 گراف کی مدد سے مندرجہ ذیل مواد کو استعمال کرتے ہوئے جوابات معلوم کریں اور پھر فارمولوں کی مدد سے ان جوابات کی پڑتال کیجیے۔

(الف) وسطانیہ اور چہارمی حصہ، مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی مدد سے معلوم کریں۔

(ب) کالمی نقشہ بنا کر عادہ معلوم کریں۔

حقیقی جماعتی حدود	تعددات
10—20	2
20—30	5
30—40	9
40—50	6
50—60	4
60—70	1

6.4 انتشاری پیمانے (Measures of Dispersion)

شماریات میں انتشار کا مطلب کسی مواد میں موجود مدّات کا پھیلاؤ ہے۔ اس پھیلاؤ کو مواد میں مندرجہ ذیل دو طریقوں سے دیکھا جاتا ہے۔

(الف) مواد کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی دو مدات کے درمیان پھیلاؤ۔

(ب) حسابی اوسط کے ارد گرد مدّات کا پھیلاؤ۔

انتشار معلوم کرنے کا مقصد یہ ہے کہ ہم درمیانی قیمت کے ارد گرد ہر آبادی (Population) کی اکائی کے رویہ کو پرکھ سکیں اور یہ دو مواد کا موازنہ کرنے میں بھی مددگار ثابت ہوتی ہے۔

ایسا پیمانہ جو مواد میں تبدیلی کی حد یا ڈگری معلوم کرنے کے لئے استعمال ہو انتشاری پیمانہ کہلاتا ہے۔

ہم یہاں مطلقاً چند اہم انتشاری پیمانوں کے بارے میں بات کریں گے۔

(الف) سعت (Range)

دیے گئے مواد میں سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مد کے فرق کو سعت کہا جاتا ہے۔ اس کی پیمائش کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$\text{سعت} = \text{بڑی قیمت} - \text{چھوٹی قیمت}$$
$$= X_{\max} - X_{\min} = X_m - X_0$$

جہاں

$$X_{\max} = X_m = \text{سب سے بڑی مد}$$
$$X_{\min} = X_0 = \text{سب سے چھوٹی مد}$$

مسلسل گروہی مواد کے لیے سعت نکالنے کا فارمولا درج ذیل ہے۔

$$\text{سعت} = (\text{آخری گروہ کی بالائی جماعتی حد}) - (\text{پہلے گروہ کی زیریں جماعتی حد})$$

مثال 1: طالبعلموں کے اوزان کی سعت معلوم کریں۔

110, 109, 84, 89, 77, 104, 74, 97, 49, 59, 103, 62.

حل: دیے گئے مواد کے مطابق

$$X_m = \text{سب سے بڑی مد} = 110$$
$$X_0 = \text{سب سے چھوٹی مد} = 49$$
$$\text{سعت} = X_m - X_0$$
$$= 110 - 49 = 61$$

مثال 2: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کی سعت معلوم کریں۔

گروہ/جماعت	f
10 — 19	10
20 — 29	7
30 — 39	9
40 — 49	6
50 — 59	9
60 — 69	1
کل تعداد	$\Sigma f = 40$

حل: ہم مواد کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی جماعتی حدود درج ذیل طریقے سے نکالیں گے۔

گروہ/جماعت	حقیقی جماعتی حدود	تعدادات
10 — 19	9.5—19.5	10
20 — 29	19.5—29.5	7
30 — 39	29.5—39.5	9
40 — 49	39.5—49.5	6
50 — 59	49.5—59.5	7
60 — 69	59.5—69.5	1

(پہلے گروہ کی زیریں جماعتی حد) – (آخری گروہ کی بالائی جماعتی حد) = سعت

سعت $= 69.5 - 9.5 = 60$

(ب) تغیریت (Variance)

تغیریت وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں، اُن کے مجموعہ کو ان کی مدات x_i، $(i = 1, 2, \ldots, n)$ کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ علامتی طور پر اسے S^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$X \text{ کا تغیریت } = S^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}$$

(ج) معیاری انحراف (Standard Deviation)

معیاری انحراف اس قیمت کا مثبت جذر ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں اُن کے مجموعہ کو ان کی مدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہو۔ مختصراً معیاری انحراف تغیریت کا مثبت جذر ہے۔ علامتی طور پر اسے S.D سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$X \text{ کا معیاری انحراف } = \text{S.D}(X) = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}}$$

تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کرنے کا طریقہ

ہم گروہی اور غیر گروہی مواد سے تغیریت اور معیاری انحراف نکالنے کے لیے درج ذیل فارمولے استعمال کرتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

تغیریت کا فارمولا

$$\text{Var}(X) = S^2 = \frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2$$

معیاری انحراف کا فارمولا

$$\text{S.D}\,(X) = S = \sqrt{\left[\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2\right]}$$

مثال 3: چھ طالبعلموں کے ریاضی میں حاصل کردہ نمبرز درج ذیل ہیں۔ تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

طالبعلم	1	2	3	4	5	6
نمبرز	60	70	30	90	80	42

حل: فرض کیا طالبعلم کے نمبر $= X$

ہم تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کرنے کے لیے جدول میں مندرجہ ذیل کالم بنائیں گے۔

	X	X^2	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$
	60	3600	−2	4
	70	4900	8	64
	30	900	−32	1024
	90	8100	28	784
	80	6400	18	324
	42	1764	−20	400
کل تعداد	$\Sigma X = 372$	$\Sigma X^2 = 25664$	$\Sigma(X-\overline{X}) = 0$	$\Sigma(X-\overline{X})^2 = 2600$

$(\overline{X})$ حسابی اوسط $= \dfrac{\Sigma X}{n} = \dfrac{372}{6} =$ 62 نمبرز

تغیریت $= S^2 = \dfrac{2600}{6} =$ 433.3333 مربع نمبرز

فارمولا کو استعمال کرتے ہوئے

تغیریت $= S^2 = \dfrac{25664}{6} - \left(\dfrac{372}{6}\right)^2$

$\approx 4277.3333 - 3844 =$ 433.3333 مربع نمبرز

معیاری انحراف $= S \approx \sqrt{4277.3333 - 3844} = \sqrt{433.3333}$

$\approx$ 20.81666 نمبرز

گروہی مواد

تغیریت کا فارمولا

$$S^2 = \frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2$$

معیاری انحراف کا فارمولا

$$S = \sqrt{\left[\frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2\right]}$$

مثال 4: مندرجہ ذیل مواد ٹافی کے ڈبوں کے اوزان (گراموں میں) ظاہر کر رہا ہے۔ تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

X (gm)	f
4.5	2
14.5	10
24.5	5
34.5	9
44.5	6
54.5	7
64.5	1

حل: ہم مندرجہ ذیل جدول بنائیں گے۔

	X	f	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^2$	fX	fX^2
	4.5	2	−28	784	1568	9	40.5
	14.5	10	−18	324	3240	145	2102.5
	24.5	5	−8	64	320	122.5	3001.25
	34.5	9	2	4	36	310.5	10712.25
	44.5	6	12	144	864	267	11881.5
	54.5	7	22	484	3388	381.5	20791.75
	64.5	1	32	1024	1024	64.5	4160.25
کل تعداد	$\Sigma X =$ 370			$\Sigma(X-\bar{X})$ = 2600	$\Sigma f(X-\bar{X})^2$ = 10440	$\Sigma fX = 130$	$\Sigma fX^2 =$ 52690

بنیادی فارمولا کے مطابق

$$S^2 = \frac{10440}{40} = 261 \text{ مربع گرام}$$

گروہی مواد والا فارمولا کے مطابق

$$S^2 = \frac{52690}{40} - \left(\frac{1300}{40}\right)^2$$
$$= 1317.25 - (32.5)^2 = 1317.25 - 1056.25$$

$= 261$ مربع گرام

معیاری انحراف کے فارمولے کے مطابق

$$S = \sqrt{\frac{10440}{40}} = \sqrt{261} = 16.155 \text{ گرام}$$

$$S = \sqrt{\frac{52690}{40} - \left(\frac{1300}{40}\right)^2} = \sqrt{261}$$

$$= 16.155 \text{ گرام}$$

مثال 5: طالبعلموں نے شماریات میں جو نمبرز لیے درج ذیل مواد ان نمبروں کو ظاہر کر رہا ہے گروپ A اور گروپ B کی اوسطی تبدیلی کا موازنہ کریں۔

X = نمبرز (گروپ۔اے)	Y = نمبرز (گروپ۔بی)
60	62
70	62
30	65
90	68
80	67
40	48

حل: اوسط تبدیلی کا موازنہ کرنے کے لیے ہم دونوں گروپوں کا معیاری انحراف معلوم کریں گے۔

	X	Y	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$Y-\bar{Y}$	$(Y-\bar{Y})^2$
	60	62	−2	4	0	0
	70	62	8	64	0	0
	30	65	−32	1024	3	9
	90	68	28	784	6	36
	80	67	18	324	5	25
	40	48	−20	400	−14	196
کل تعداد	$\Sigma X = 370$	$\Sigma Y = 372$		$\Sigma(X-\bar{X})^2 = 2600$		$\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = 266$

$$\text{گروپ۔اے کا حسابی اوسط} = \bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{370}{6} = 61.67 \simeq 62 \text{ نمبرز}$$

$$\text{گروپ۔بی کا حسابی اوسط} = \bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{372}{6} = 62 \text{ نمبرز}$$

$$\text{S.D}(X) = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2600}{6}} = \sqrt{433.333}$$

$$= 20.82 \text{ نمبرز}$$

$$\text{S.D}\ (Y) = \sqrt{\frac{\sum\left(Y-\bar{Y}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{266}{6}} = \sqrt{44.333}$$

$$= 6.66 \text{ نمبرز}$$

نوٹ: ہم نے دیکھا کہ گروپ۔بی کی تبدیلی کی شرح گروپ۔اے کی تبدیلی کی شرح سے کم ہے۔ پس معلوم ہوا کہ گروپ۔بی کے طالبعلموں کے نمبرز اپنے اوسط نمبروں سے قریب تر ہیں نہ کہ گروپ۔اے کے طالبعلموں کے نمبرز۔

مشق 6.3

-1 انتشار کے بارے میں آپ کیا جانتے ہیں؟ بیان کریں۔

-2 انتشاری پیمانے کی تعریف اور وضاحت کریں۔

-3 سعت، معیاری انحراف اور تغیریت کی تعریف لکھیں۔

-4 پانچ اساتذہ کی تنخواہیں (روپے میں) درج ذیل ہیں:

11500, 12400, 15000, 14500, 14800.

سعت اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

-5 (الف) معیاری انحراف 'S' معلوم کریں۔

(i) 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5

(ii) 9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18.

(ب) درج ذیل مواد کا تغیریت معلوم کریں۔

10, 8, 9, 7, 5, 12, 8 6, 8, 2

-6 بتیس (32) چیزوں کی لمبائی درج ذیل ہے۔ اس تعددی تقسیم کی اوسط لمبائی اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

لمبائی	20–22	23–25	26–28	29–31	32–34
تعددات	3	6	12	9	2

-7 مندرجہ ذیل مواد جو کہ نمبروں کو ظاہر کر رہا ہے۔ مواد کی مدد سے سعت معلوم کریں۔

نمبرز	(طالبعلموں کی تعداد) تعددات
31 — 40	28
41 — 50	31
51 — 60	12
61 — 70	9
71 — 75	5

متفرق مشق 6

-1 کثیر الانتخابی سوالات

دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) گروہی تعدادی جدول کہلاتا ہے۔

(a) مواد (b) تعدادی تقسیم (c) تعدادی کثیر الاضلاع

(ii) کالمی نقشہ مجموعہ ہے متصلہ

(a) مربعوں کا (b) مستطیلوں کا (c) دائروں کا

(iii) تعدادی کثیر الاضلاع کئی پہلوؤں کی ________ ہے۔

(a) بند شکل (b) مستطیل (c) دائرہ

(iv) مجموعی تعدادی جدول کہلاتا ہے۔

(a) تعدادی تقسیم (b) مواد (c) کم تر مجموعی تعدادی تقسیم

(v) مجموعی تعدادی کثیر الاضلاع میں تعدادات کو ________ کے مدمقابل نقشہ پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

(a) درمیانی نقاط (b) بالائی جماعتی حدود (c) جماعتی حدود

(vi) حسابی اوسط ایسا پیمانہ ہے جو متغیر مقدار کی قیمت معلوم کرتا ہے متغیر کی تمام قیمتوں کے مجموعہ کو اُنکی ________ پر تقسیم کر کے:

(a) تعداد (b) جماعت/گروہ (c) مخرج

(vii) انحراف کا مطلب ہے کہ کسی متغیر مقدار کی قیمت سے ________ کا فرق۔

(a) مستقل مقدار (b) کالمی نقشہ (c) مجموعہ

(viii) تعدادی تقسیم کی شکل میں مواد کہلاتا ہے۔

(a) گروہی مواد (b) غیر گروہی مواد (c) کالمی نقشہ

(ix) کسی متغیر مقدار کا ایک جیسی مدات مثلاً مستقل مقدار k کے لیے حسابی اوسط ہوتا ہے۔

(a) منفی (b) بذاتِ خود k (c) صفر

(x) حسابی اوسط ________ تبدیل کرنے سے اثر انداز ہوتا ہے۔

(a) قیمت (b) نسبت (c) منبع/ماخذ

(xi) حسابی اوسط ________ تبدیل کرنے سے اثر انداز ہوتا ہے۔

(a) جگہ (b) پیمانہ پیمائش (c) مقدار/خرچہ

(xii) کسی متغیر X کا اس کے حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ ہمیشہ ________ ہوتا ہے۔

(a) صفر (b) ایک (c) ایک جیسا

(xiii) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مدات کے حاصل ضرب کا n^{th} مثبت جذر / رُوٹ کہلاتا ہے۔

(a) عادہ (b) حسابی اوسط (c) اقلیدسی اوسط

(xiv) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مدات کے معکوس کا معکوسی حسابی اوسط کہلاتا ہے۔

(a) اقلیدسی اوسط (b) وسطانیہ (c) ہم آہنگ اوسط

(xv) کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آنے والی مد کہلاتی ہے۔

(a) عادہ (b) وسطانیہ (c) ہم آہنگ اوسط

(xvi) ایسا پیمانہ جو مواد کی درمیانی مد بتائے، کہلاتا ہے۔

(a) وسطانیہ (b) عادہ (c) حسابی اوسط

(xvii) ایسا پیمانہ جو مواد کو چار حصوں میں تقسیم کرے، کہلاتا ہے۔

(a) عشری حصّہ (b) چہارمی حصّہ (c) فیصدی حصّہ

(xviii) کسی مواد میں مدات کا پھیلاؤ کہلاتا ہے۔

(a) اوسط (b) انتشار (c) مرکزی رجحان

(xix) ایسا پیمانہ جو مواد میں تبدیلی کی شرح کو معلوم کرے ________ کا پیمانہ کہلاتا ہے۔

(a) انتشار (b) مرکزی رجحان (c) اوسط

(xx) کسی مواد کی انتہائی مدات کے فرق کو کہتے ہیں۔

(a) اوسط (b) سعت (c) چہارمی حصّہ

(xxi) x_i مدات کے حسابی اوسط سے انحراف کے مربعوں کے حسابی اوسط کو ________ کہا جاتا ہے۔

(a) تغیرت (b) معیاری انحراف (c) سعت

(xxii) X_i مدات کے حسابی سے انحراف کے مربعوں کے حسابی اوسط کے مثبت جذر کو ________ کہتے ہیں۔

(a) ہم آہنگ اوسط (b) سعت (c) معیاری انحراف

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) جماعتی حدود کی تعریف کریں۔

(ii) جماعتی نشان کی تعریف کریں۔

(iii) مجموعی تعدد کسے کہتے ہیں؟

(iv) تعددی تقسیم کی تعریف کریں۔

(v) کالمی نقشہ کسے کہتے ہیں؟

(vi) مرکزی رجحان کے دو پیمانوں کے نام بتائیں۔

(vii) حسابی اوسط کی تعریف کریں۔

(viii) حسابی اوسط کی تین خصوصیات تحریر کریں۔

(ix) وسطانیہ کی تعریف کریں۔ (x) عادہ کی تعریف کریں۔

(xi) ہم آہنگ اوسط کے بارے میں آپ کیا جانتے ہیں؟ بیان کریں۔

(xii) اقلیدسی اوسط کی تعریف کریں۔ (xiii) سعت کی تعریف کریں۔

(xiv) معیاری انحراف کی تعریف کریں۔

خلاصہ

- **سعت** کسی مواد کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مد کے فرق کو کہتے ہیں۔
- کسی جماعت/گروہ کی چھوٹی اور بڑی قیمت اس کی **جماعتی حدود** کہلاتی ہیں۔
- بالائی جماعتی حد تک تعدد کے مجموعہ کو **مجموعی تعدد** کہتے ہیں۔
- کسی مواد کو مختلف گروہوں میں ترتیب دے کر اندراجی طریقہ (جدول کی صورت) میں لکھنے کو **تعددی تقسیم** کہتے ہیں۔
- **کالمی نقشہ** XY-پلین (سطح) پر تیار کردہ متصلہ مستطیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔
- **مجموعی تعددی کثیر الاضلاع** مجموعی تعددی تقسیم سے کم تر گراف ہے۔
- **حسابی اوسط** ایک ایسا عمل/طریقہ/پیمانہ ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے مجموعہ کو اُن کی تعداد پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔
- کسی متغیر مقدار سے مستقل مقدار کے فرق کو **انحراف** کہا جاتا ہے جیسے $D_i = x_i - A$
- **اقلیدسی اوسط** سے مراد $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مدّات کے حاصل ضرب کا مثبت جذر ہے۔
- **ہم آہنگ اوسط** سے مراد وہ قیمت ہے جو $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مدّات کے معکوس کا معکوسی حسابی اوسط لینے سے حاصل ہوتی ہے۔
- **عادہ** سے مراد وہ قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ بار آئے۔
- **وسطانیہ** ایک ایسا پیمانہ ہے جو کسی مواد کی درمیانی مد کا تعین کرتا ہے۔
- شماریات میں، **انتشار** سے مراد کسی مواد میں موجود مدات کا پھیلاؤ ہے۔
- **تغیرت** وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں اُن کے مجموعہ کو مدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔
- **معیاری انحراف** تغیرت کا مثبت جذر ہے۔

یونٹ 7

تکونیات
(INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY)

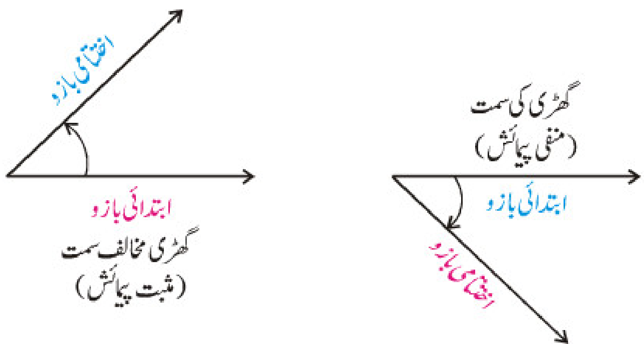
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- زاویہ کی ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں پیمائش کرنا۔
- ڈگری منٹس اور سیکنڈز میں دیے گئے زاویہ کو اعشاریہ کی شکل میں تبدیل کرنا۔
- زاویہ کی ریڈین (*Radian*) میں تعریف کرنا اور ریڈین اور ڈگری کے درمیان تعلق ثابت کرنا۔
- دائرے کے رداس، قوس اور مرکزی زاویہ کا آپس میں تعلق، $l = r\theta$ قائم کرنا۔
- دائرے کے قطاع (Sector) کا رقبہ $\frac{1}{2}r^2\theta$ کے برابر ثابت کرنا۔
- مندرجہ ذیل کی تعریف اور ان کی شناخت کرنا۔
  - عمومی زاویے (ہم بازو زاویے)
  - زاویہ کی معیاری حالت
- ربعوں (*Quadrants*) اور ربع زاویوں (*Quadrental Angles*) کی پہچان کرنا۔
- تکونیاتی نسبتوں (*Trigonometric Ratios*) اور ان کی معکوس نسبتوں کی اکائی دائرہ کی مدد سے تعریف کرنا۔
- تکونیاتی نسبتوں 45^o, 30^o اور 60^o کی قیمتوں کی یاد تازہ کرنا۔
- مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامتوں کی پہچان کرنا۔
- مختلف ربعوں (*Quadrants*) میں تکونیاتی نسبتوں کی قیمت معلوم کرنا اگر ایک تکونیاتی نسبت دی ہوئی ہو۔
- تکونیاتی نسبتوں 0^o, 90^o, 180^o, 270^o اور 360^o کی قیمتیں معلوم کرنا۔
- تکونیاتی مماثلتوں (*Trigonometric Identities*) کو ثابت کرنا اور مختلف تکونیاتی روابط (*Relationship*) کو ظاہر کرنے کے لیے انہیں استعمال کرنا۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کرنا۔
- روز مرہ زندگی میں ایسے سوالات (مسائل) کو حل کرنا جن میں زاویہ صعود اور زاویہ نزول کا استعمال ہوا ہو۔

7.1 زاویہ کی پیمائش (Measurement of an Angle)

دو غیر ہم خط شعاعیں جو کہ ہم سرا بھی ہوں ایک زاویہ کا تعین کرتی ہیں۔ شعاعیں زاویہ کے بازو کہلاتی ہیں اور نقطہ جس پر شعاعیں آپس میں ملتی ہیں، زاویہ کا راس (Vertex) کہلاتا ہے۔

یہ بہت آسان ہے اگر ہم ایک شعاع کو (ایک نقطہ کے گرد) ایک سمت سے دوسری سمت میں گھما کر زاویہ بنائیں۔ اِس طرح زاویہ بنانے سے شعاع کی پہلی سمت زاویہ کا ابتدائی بازو (Initial arm) اور شعاع کی آخری سمت (زاویہ کا) اختتامی بازو کہلاتی ہے۔ اگر شعاع کی گردش گھڑی کی سمت یا گھڑی مخالف سمت ہو تو زاویہ کی پیمائش بھی مثبت یا منفی ہوتی ہے۔



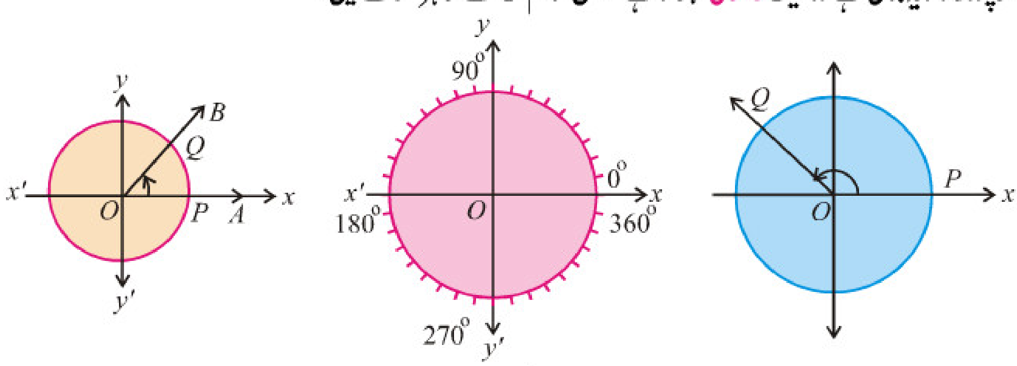
شکل 7.1

7.1(i) زاویہ کی ساٹھ کے اساس کے نظام میں پیمائش

Measurement of an angle in sexagesimal system (degree, minute and second)

درجہ/ڈگری (Degree)

ہم ایک دائرے کے محیط کو 360 برابر قوسوں (Arcs) میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے ایک قوس دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بناتی ہے وہ ایک ڈگری کہلاتا ہے۔ اس کو ہم 1° سے ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 7.1.1

1° ، $1'$ اور $1''$ بالترتیب ایک ڈگری، ایک منٹ اور ایک سیکنڈ کو ظاہر کرتے ہیں۔

پس 60 سیکنڈ مل کر ایک منٹ ($1'$) بناتے ہیں۔

60 منٹ مل کر ایک درجہ (1°) بناتے ہیں۔

90 درجے مل کر ایک قائمہ زاویہ بناتے ہیں۔

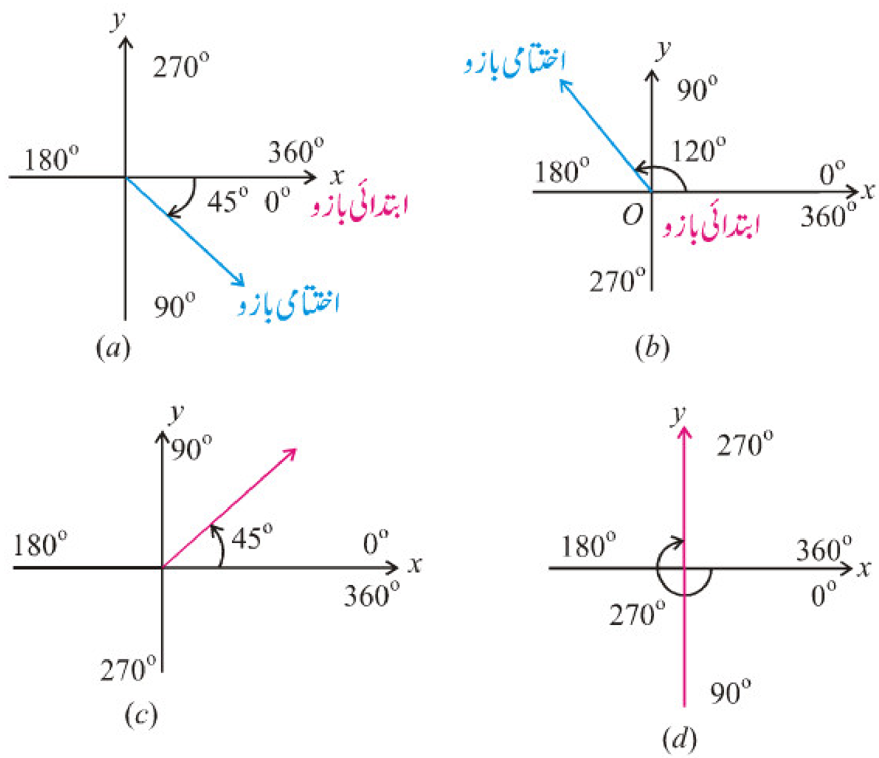
360 درجے مل کر چار قائمہ زاویہ بناتے ہیں۔

360° کا زاویہ ایک دائرے یا ایک مکمل چکر کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی زاویہ کو بنانے کے لیے ہم مستوی (Coordinate Plane) کا استعمال کرتے ہیں، جہاں زاویہ کی ابتدائی شعاع (Initial Ray) مثبت خط x- محور (x-axis) پر ہو گی اور اس کا راس مبدا (Origin) پر ہو گا۔

مثال: مندرجہ ذیل زاویوں کو واضح کیجیے۔

$(a)\ -45^\circ \quad (b)\ 120^\circ \quad (c)\ 45^\circ \quad (d)\ -270^\circ$

حل:



شکل 7.1.2

7.1(ii) D^o، M'، S'' میں دیے گئے زاویہ کو اعشاریہ کی شکل میں یا اس کے برعکس لکھنا

تبدیلی کا یہ عمل مثالوں کے ذریعے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1: (i) $25^o30'$ کو اعشاریہ ڈگری میں تبدیل کریں۔

(ii) 32.25^o کو D^o، M' اور S'' کی شکل میں لکھیے۔

حل:

(i) $$25^o30' = 25^o + \left(\frac{30}{60}\right)^o = 25^o + 0.5^o = 25.5^o$$

(ii) $$32.25^o = 32^o + 0.25^o = 32^o + \left(\frac{25}{100}\right)^o$$

$$= 32^o + \frac{1^o}{4} = 32^o + \left(\frac{1}{4} \times 60\right)' = 32^o\ 15'$$

مثال 2: $12^o23'35''$ کو اعشاریہ ڈگری میں تین درجہ اعشاریہ تک لکھیں۔

حل:

$$12^o23'35'' = 12^o + \frac{23^o}{60} + \frac{35^o}{60 \times 60} = \left(12^o + \frac{23^o}{60} + \frac{35^o}{3600}\right)$$

$$\approx 12^o + .3833^o + 0.00972^o$$

$$\approx 12.3930^o = 12.393^o$$

مثال 3: 45.36^o کو D^o، M' اور S'' کی شکل میں لکھیے۔

حل:

$$(45.36)^o = 45^o + (.36)^o = 45^o + \left(\frac{36}{100}\right)^o = 45^o + \left(\frac{9}{25} \times 60'\right)$$

$$= 45^o + 21.6' = 45^o + 21' + (0.6 \times 60)''$$

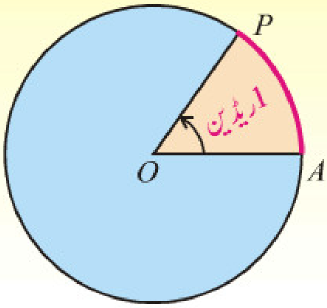
$$= 45^o21'36''$$

7.1(iii) زاویہ کی ریڈین (Radian) میں پیمائش (دائروی نظام)

Radian measure of an angle (circular system)

زاویہ کی پیمائش کا دوسرا نظام، دائروی نظام (Circular System) بہت اہمیت کا حامل ہے اور ریاضی کی دوسری اعلیٰ برانچوں میں اس کا استعمال ہوتا ہے۔

ریڈین (Radian)



شکل 7.1.3

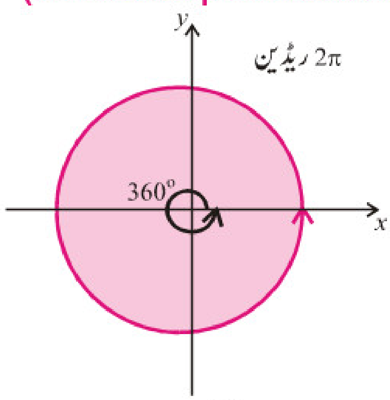
جب دائرے پر کسی قوس کی لمبائی اسی دائرے کے نصف قطر کے برابر ہو تو دائرے کے مرکز پر بننے والا زاویہ ایک **ریڈین** کہلاتا ہے۔

نقطہ O کو مرکز مان کر رداس 'r' کا ایک دائرہ لیں۔ دائرہ پر نقطہ A سے نقطہ P تک قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر لیں۔ نقطہ O کو نقطہ A اور نقطہ P سے ملا دیں۔ اس طرح حاصل ہونے والا زاویہ $\angle AOP$ ایک ریڈین کہلاتا ہے، اگر

قوس $\widehat{AP}$ کی لمبائی = رداس $\overline{OA}$ کی لمبائی،

تو $\quad m\angle AOP = 1$ ریڈین

ڈگری اور ریڈین کے درمیان تعلق (Relationship Between Degree and Radian)



شکل 7.1.4

ہم جانتے ہیں کہ کسی دائرے کا محیط $2\pi r$ ہوتا ہے جہاں 'r' دائرے کا رداس ہے۔ چونکہ دائرہ ایک قوس ہے جس کی لمبائی $2\pi r$ کے برابر ہوتی ہے۔ ایک مکمل دائرے میں زاویہ کی ریڈین میں پیمائش $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ ہے۔

اس لیے $\quad 360^\circ = 2\pi$ ریڈین

یا $\quad$ (i) $\quad \boxed{180^\circ = \pi \text{ ریڈین}}$

اس ربط کو استعمال کرتے ہوئے ہم ڈگری کو ریڈین میں اور ریڈین کو ڈگری میں آسانی سے تبدیل کر سکتے ہیں۔

$$180^\circ = \pi \text{ ریڈین} \Rightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین},$$

$$x^\circ = x \,.\, 1^\circ = x\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ ریڈین} \qquad \text{(ii)}$$

$$1 \text{ ریڈین} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \;\; y \text{ ریڈین} = y\left(\frac{180}{\pi}\right) \text{ ڈگری} \qquad \text{(iii)}$$

ڈگری اور ریڈین میں اہم زاویے

$180^\circ = 1\,(180^\circ) = \pi$ ریڈین

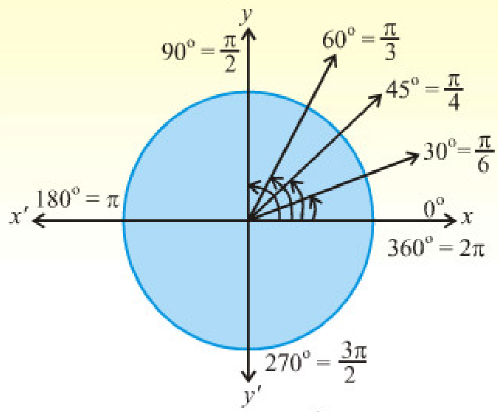
$90^\circ = \frac{1}{2}(180^\circ) = \frac{\pi}{2}$ ریڈین

$60^\circ = \frac{1}{3}(180^\circ) = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

$45^\circ = \frac{1}{4}(180^\circ) = \frac{\pi}{4}$ ریڈین

$30^\circ = \frac{1}{6}(180^\circ) = \frac{\pi}{6}$ ریڈین

$270^\circ = \frac{3}{2}(180^\circ) = \frac{3\pi}{2}$ ریڈین



شکل 7.1.5

مثال 4: درج ذیل زاویوں کو ریڈین میں تبدیل کریں۔

(a) 15° (b) $124^\circ 22'$

حل:

مساوات (i) کو استعمال کرنے سے

(a) $15^\circ = 15\left(\frac{\pi}{180}\text{ ریڈین}\right)$

$= \frac{\pi}{12}$ ریڈین

(b) $124^\circ 22' = \left(124 + \frac{22}{60}\right)^\circ \approx (124.3666)\left(\frac{\pi}{180}\right)$ ریڈین

≈ 2.171 ریڈین

مثال 5: درج ذیل کو ڈگری میں ظاہر کریں۔

(a) $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین (b) 6.1 ریڈین

حل:

(a) $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین $= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)$ ڈگری

$= 120^\circ$

(b) 6.1 ریڈین $= (6.1)\left(\frac{180}{\pi}\right)$ ڈگری $= 6.1\,(57.295779) = 349.5043$ ڈگری

یاد رکھیے:

1 ریڈین $\approx \left(\frac{180}{3.1416}\right)^\circ \approx 57.295795^\circ \approx 57^\circ 17' 45''$, $1^\circ \approx \frac{3.1416}{180} \approx 0.0175$ ریڈین

مشق نمبر 7.1

-1 مندرجہ ذیل زاویوں کو xy-مستوی میں ظاہر کریں۔

(i) 30^{o} (ii) $22\frac{1}{2}^{o}$ (iii) 135^{o} (iv) 225^{o}

(v) -60^{o} (vi) -120^{o} (vii) -150^{o} (viii) -225^{o}

-2 ساٹھ کے اساس میں دیے گئے درج ذیل زاویوں کو اعشاریہ کی شکل میں لکھیے۔

(i) $45^{o}30'$ (ii) $60^{o}30'30''$ (iii) $125^{o}22'50''$

-3 مندرجہ ذیل کو D^{o}، M' اور S'' میں لکھیے۔

(i) 47.36^{o} (ii) 125.45^{o} (iii) 225.75^{o} (iv) -22.5^{o}

(v) -67.58^{o} (vi) 315.18^{o}

-4 مندرجہ ذیل زاویوں کو ریڈین میں لکھیے۔

(i) 30^{o} (ii) $(60)^{o}$ (iii) 135^{o} (iv) 225^{o} (v) -150^{o}

(vi) -225^{o} (vii) 300^{o} (viii) 315^{o}

-5 مندرجہ ذیل کو ڈگری میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{3\pi}{4}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{7\pi}{8}$ (iv) $\frac{13\pi}{16}$ (v) 3

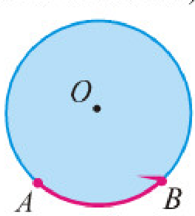
(vi) 4.5 (vii) $\frac{-7\pi}{8}$ (viii) $-\frac{13}{16}\pi$

7.2 قطاع دائرہ (Sector of a Circle)

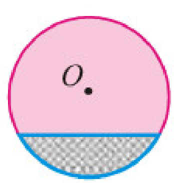
(i) کسی دائرے کے محیط کا حصہ، قوس (Arc) کہلاتا ہے۔

(ii) دائرے کے وتر اور قوس کا درمیانی حصہ، قطعہ دائرہ (Segment of a circle) کہلاتا ہے۔

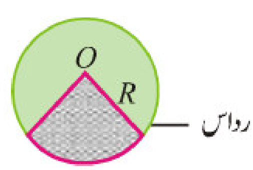
(iii) دو رداسوں اور ایک قوس (arc) کے درمیانی حصے کو قطاع دائرہ (Sector of a circle) کہتے ہیں۔



قوس

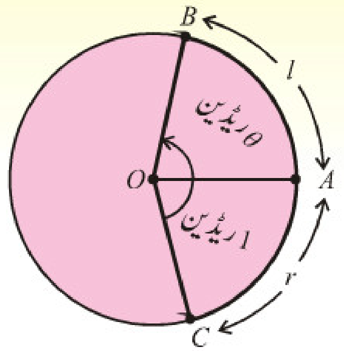


قطعہ دائرہ



قطاع دائرہ

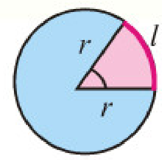
7.2(i) اگر کسی دائرے کا رداس r، قوس کی لمبائی l اور قوس کا زاویہ θ ہو جو کہ وہ مرکز پر بناتی ہے تو ثابت کیجیے کہ $l = r\theta$، جبکہ θ کی پیمائش ریڈین میں ہے۔



شکل 7.2.1

فرض کریں کہ قوس $l = \widehat{AB}$ دائرہ کے مرکز پر زاویہ θ ریڈین بناتی ہے۔ مستوی جیومیٹری کی رو سے مختلف قوسوں سے بننے والے زاویے ان قوسوں کی لمبائی کے متناسب ہوتے ہیں۔

$$\frac{m\angle AOB}{m\angle AOC} = \frac{m\widehat{AB}}{m\widehat{AC}}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{\theta \text{ ریڈین}}{1 \text{ ریڈین}} = \frac{l}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{r} = \theta \quad \text{or} \quad \boxed{l = r\theta}$$

مثال 1 : ایک دائرے کا رداس 10 میٹر ہو تو

(a) دائرے کے مرکز پر 1.6 ریڈین کا زاویہ دائرے پر کتنی لمبائی کے برابر قوس بنائے گا؟

(b) 60 ڈگری کا زاویہ دائرے کے محیط پر کس لمبائی کی قوس بنائے گا؟

حل :

(a) $\theta = 1.6$ ریڈین ، $r = 10$ میٹر اور $l = ?$

$l = r\,\theta \quad \Rightarrow \quad l = 10 \times 1.6 = 16$ میٹر

(b) $\theta = 60^{\circ} = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

$l = r\,\theta = 10 \times \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ میٹر

مثال 2 : ایک سائیکل سوار ایک دائرے کے گرد جس کا رداس 15 میٹر ہے، 3.5 چکر لگاتا ہے۔ بتائیے اس نے کتنا سفر طے کیا؟

حل : ہم جانتے ہیں کہ

ایک مکمل چکر میں زاویہ کی مقدار $= 2\pi$ ریڈین

3.5 چکر میں کل زاویہ کی مقدار $= 2\pi \times 3.5$

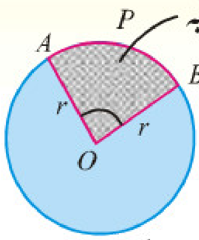
کل طے کردہ فاصلہ $= l = r\theta = 15 \times 2\pi \times 3.5$

کل طے کردہ فاصلہ $= l = r\theta = 15 \times 2\pi \times 3.5$

$= 105\,\pi$ میٹر

7.2(ii) قطاع دائرہ کا رقبہ (Area of Circular Sector)

رداس 'r' کا ایک دائرہ لیں اور l یونٹ کے برابر ایک قوس لگائیں جو کہ دائرہ کے مرکز 'O' پر زاویہ θ بناتی ہو۔



شکل 7.2.2

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

دائرے کا زاویہ $= 2\pi$

قطاع دائرے کا زاویہ $= \theta$ ریڈین

بنیادی جیومیٹری کے اصول کے مطابق درج ذیل تناسب کا کلیہ استعمال کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\text{قطاع دائرے } AOBP \text{ کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}} = \frac{\text{قطاع دائرے کا زا}}{\text{دائرے کا زاویہ}}$$

$$\frac{\text{قطاع دائرے } AOBP \text{ کا رقبہ}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\text{قطاع دائرے } AOBP \text{ کا رقبہ} = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi}$$

پس

$$\boxed{\text{قطاع دائرے کا رقبہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta}$$

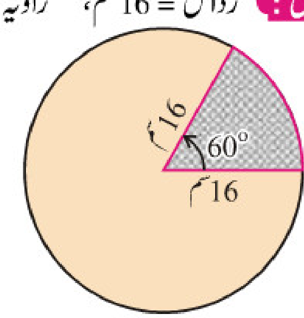
مثال 3: ایک قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کریں جس کا رداس 16 سم اور مرکز پر زاویہ 60° ہے۔

حل : رداس = 16 سم، زاویہ $= \theta = 60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

$$\text{قطاع دائرے کا رقبہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$= \frac{1}{2}(16)^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(256) \times \left(\frac{22}{7 \times 3}\right) = 134.1 \text{ cm}^2$$



مشق نمبر 7.2

-1 θ معلوم کیجیے جبکہ:

(i) $l = 2$ سم , $r = 3.5$ سم   (ii) $l = 4.5$ میٹر , $r = 2.5$ میٹر

-2 l معلوم کیجیے جبکہ:

(i) $\theta = 180^{\circ}$, $r = 4.9$ سم   (ii) $\theta = 60^{\circ}30'$, $r = 15$ ملی میٹر

-3 r معلوم کیجیے جبکہ:

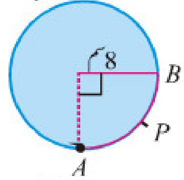
(i) $l = 4$ سم , $\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین   (ii) $l = 52$ سم , $\theta = 45^{\circ}$

-4 قوس کی لمبائی معلوم کریں جو دائرہ کے مرکز پر 1.5 ریڈین کا زاویہ بناتی ہے جبکہ دائرے کا رداس 12 میٹر ہے۔

-5 ایک نقطہ دائرے کے گرد 3.5 چکر لگا کر کتنا فاصلہ طے کرے گا جبکہ دائرے کا رداس 10 میٹر ہے؟
(7π = 3.5 چکر)

-6 3 بجے گھڑی کی سوئیوں کے درمیان دائروی پیمائش میں زاویہ کتنا ہوتا ہے؟

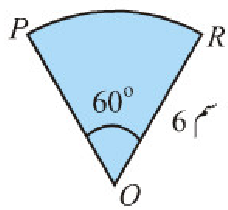
-7 قوس APB کی لمبائی کتنی ہے؟



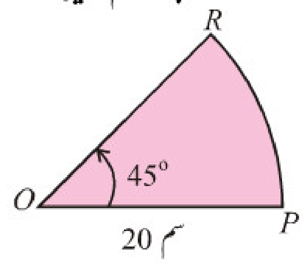
-8 دائرہ جس کا رداس 12 سم ہے، قوس، دائرہ کے مرکز پر 84° کا زاویہ بناتی ہے؟ قوس کی لمبائی کیا ہوگی؟

-9 قطاع دائرے OPR کا رقبہ معلوم کریں۔

(a)

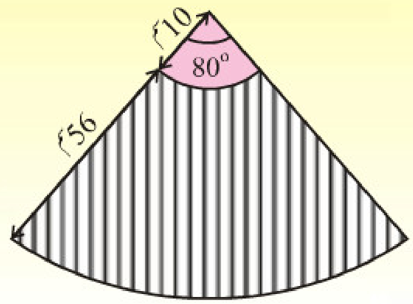


(b)



-10 قطاع دائرے کا رداس 7 میٹر اور زاویہ 20° ہو تو اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

-11 سحر ایک سکرٹ بنا رہی ہے۔ سکرٹ کے گھیرے کی ساخت تصویر میں دکھائی گئی ہے ایک گھیرے کے لیے کتنا کپڑا درکار ہے؟



-12 قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ اس کا رداس 10 سم اور زاویہ $\frac{\pi}{5}$ ریڈین ہے۔

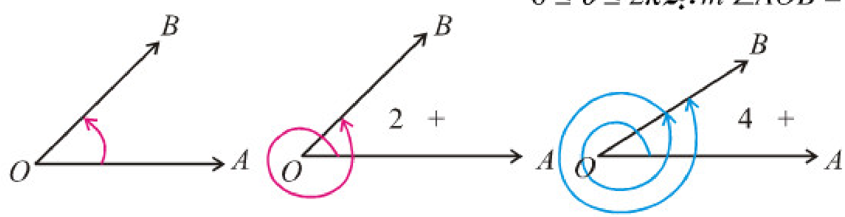
-13 ایک قطاع دائرہ کا رقبہ 10 مربع میٹر اور رداس 2 میٹر ہے۔ قطاع دائرے کا زاویہ کتنے ریڈین ہو گا؟

7.3 تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios)

7.3(i-a) عمومی زاویے (ہم بازو زاویے) General Angle (Coterminal angle)

زاویہ کو ہم ایک خمدار تیر کے نشان سے ظاہر کرتے ہیں جو زاویہ کی گردش کے ابتدائی بازو سے اختتامی بازو کی طرف سمت کو ظاہر کرتا ہے۔ دو یا دو سے زیادہ زاویے ایک ہی ابتدائی بازو سے شروع ہو کر ایک ہی اختتامی بازو کے متحمل ہو سکتے ہیں۔

ہم زاویہ $\angle AOB$ کو ابتدائی بازو $\overline{OA}$ ، اختتامی بازو $\overline{OB}$ اور راس O کے ساتھ زیرِ بحث لاتے ہیں۔ فرض کریں کہ ریڈین $m\angle AOB = \theta$ جبکہ $0 \leq \theta \leq 2\pi$



(i) (ii) (iii)

اگر اختتامی بازو ایک، دو یا دو سے زیادہ دفعہ چکر مکمل کرنے کے بعد اپنی ابتدائی حالت میں واپس آ جاتا ہے تو زاویہ کی پیمائش اس طرح ہو گی۔

(i)	θ ریڈین	صفر چکر کے بعد
(ii)	$(2\pi + \theta)$ ریڈین	ایک چکر کے بعد
(iii)	$(4\pi + \theta)$ ریڈین	دو چکروں کے بعد

کوٹرمینل زاویے (ہم بازو زاویے) (Coterminal Angles)

دو یا دو سے زیادہ زاویے جن کے ابتدائی بازو اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں، کوٹرمینل زاویے کہلاتے ہیں۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ اختتامی بازو ہر گردش پر (گھڑی کی سمت یا گھڑی کی مخالف سمت میں) 2π ریڈین زاویہ مکمل

کر کے اپنی ابتدائی حالت میں واپس آجاتا ہے۔

اگر θ ڈگری میں ہو تو $(360^\circ k + \theta)$ زاویہ θ کے ساتھ کوٹرمینل (ہم بازو) ہوگا جبکہ $k \in Z$

اگر θ ریڈین میں ہو تو $2k\pi + \theta$، زاویہ θ کے ساتھ کوٹرمینل ہوگا جبکہ $k \in Z$

پس θ عمومی زاویہ $= 2(k)\pi + \theta$ جبکہ $k \in Z$

مثال: مندرجہ ذیل میں سے کون سے زاویے 120° کے ساتھ ہم بازو 'کوٹرمینل' ہیں؟

-240°، 480°، $\frac{14\pi}{3}$ اور $-\frac{14\pi}{3}$

حل: -240° زاویہ 120° کے ساتھ ہم بازو ہے کیونکہ ان کا اختتامی بازو ایک ہی ہے۔

$480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$، زاویہ 480° ایک مکمل گردش (چکر) کے بعد 120° پر اختتام پذیر ہوتا ہے لہٰذا 120° کے ساتھ ہم بازو ہے۔

$$\frac{14}{3}\pi \equiv 4\pi + \frac{2\pi}{3} = 720^\circ + 120^\circ$$

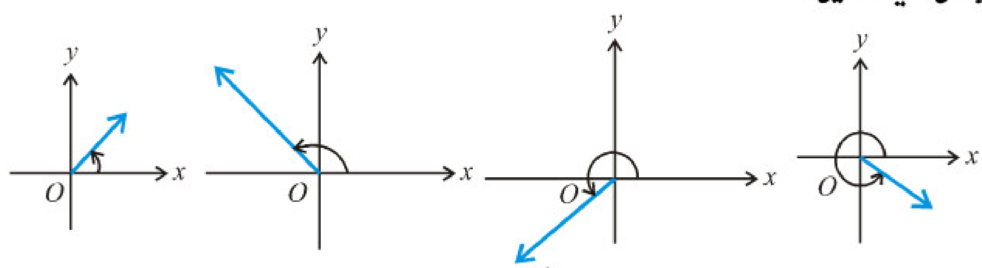
پس زاویہ $\frac{14\pi}{3}$، 120° کے ساتھ ہم بازو ہے۔

$$\frac{-14\pi}{3} = -4\pi + \frac{-2\pi}{3} = -720^\circ - 120^\circ$$

پس، $\frac{-14\pi}{3}$ زاویہ 120° کے ساتھ ہم بازو نہیں ہے۔

7.3(i-b) معیاری صورت میں زاویہ (Angle in Standard Position)

اگر عمومی زاویے کا راس (Vertex) مبدا (Origin) پر ہو اور ابتدائی بازو مستوی میں x- محور کی مثبت سمت میں ہو تو ایسا زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے۔ کیونکہ معیاری صورت میں تمام زاویوں کا ابتدائی بازو ایک ہی ہوتا ہے لہٰذا اختتامی بازو کی حالت/صورت اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔ اگر معیاری صورت میں کسی زاویے کو 2π کے ضعف (Multiple) سے کم یا زیادہ کیا جائے تو زاویے کا اختتامی بازو تبدیل نہیں ہوتا۔ کچھ عمومی زاویے جن کا اختتامی بازو تبدیل نہیں ہوتا نیچے تصویر میں دیے گئے ہیں۔

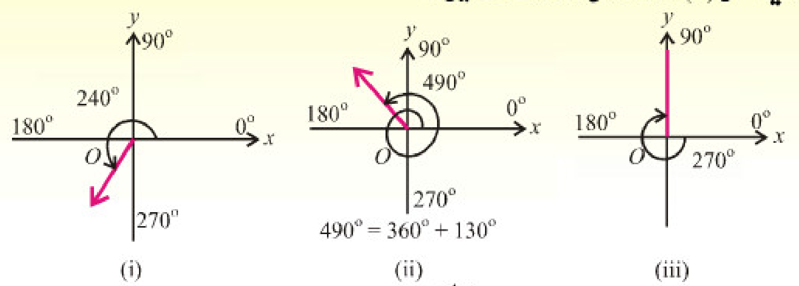


شکل 7.3.1 (a)

مثال: درج ذیل زاویوں کو معیاری صورت میں ظاہر کریں۔

(i) 240^o (ii) 490^o (iii) -270^o

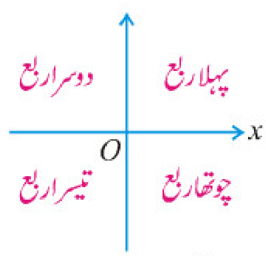
حل: زاویے شکل (b)7.3.1 میں دکھائے گئے ہیں۔



شکل (b) 7.3.1

7.3(ii) ربعے اور ربع زاویے (The Quadrants and Quadrantal Angles)

جب x– محور اور y– محور ایک دوسرے کو 90^o کے زاویے پر کاٹیں تو یہ مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کو ربعے کہتے ہیں۔ x– محور اور y- محور جہاں ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں وہ نقطہ مبدا (Origin) کہلاتا ہے اور اسے O سے ظاہر کرتے ہیں۔



0^o سے 90^o تک زاویے پہلے ربع میں ہوتے ہیں۔

90^o سے 180^o تک کے زاویے دوسرے ربع میں ہوتے ہیں۔

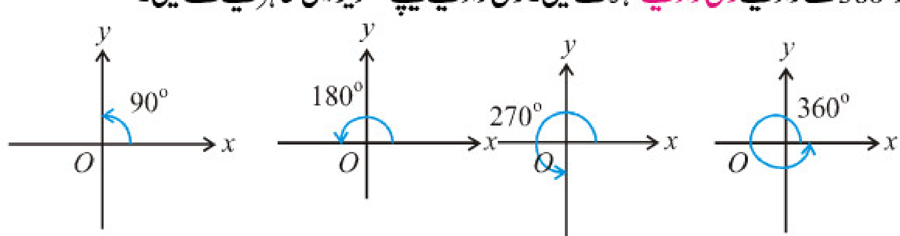
180^o سے 270^o تک زاویے تیسرے ربع میں ہوتے ہیں۔

270^o سے 360^o تک کے زاویے چوتھے ربع میں ہوتے ہیں۔

معیاری صورت میں زاویہ اس ربع میں واقع ہو گا اگر اس کا اختتامی بازو اسی ربع میں واقع ہو۔ شکل (a) 7.3.1 میں α، β، γ اور θ زاویے بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے ربع میں واقع ہیں۔

ربع زاویے (Quadrantal Angles)

اگر زاویے کا اختتامی بازو x– محور یا y– محور پر ہو تو اس طرح بننے والا زاویہ ربع زاویہ کہلاتا ہے لہٰذا 90^o، 180^o، 270^o اور 360^o کے زاویے ربع زاویے کہلاتے ہیں۔ ربع زاویے نیچے تصویر میں ظاہر کیے گئے ہیں۔



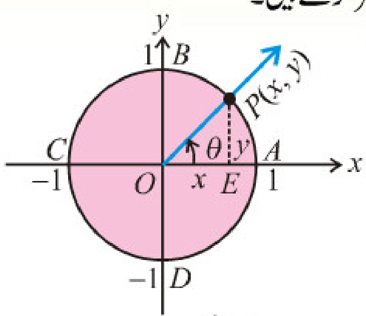
شکل 7.3.2

7.3(iii) اکائی دائرہ کی مدد سے تکونیاتی نسبتیں اور ان کے معکوس

(Trigonometric ratios and their reciprocals with the help of a unit circle)

بنیادی طور پر چھ تکونیاتی نسبتیں ہیں جن کو sine, cosine, tangent, cotangent, secant اور cosecant کہتے ہیں۔ ان نسبتوں کو بیان کرنے کے لیے دائروی طریقہ استعمال کرتے ہیں جو کہ اکائی دائرے پر مشتمل ہے۔

فرض کریں کہ ہم زاویہ کی معیاری صورت کو حقیقی عدد θ ریڈین سے ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 7.3.3

فرض کریں کہ کسی زاویہ θ کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(x, y)$ واقع ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

ہم sineθ کو sinθ اور cosineθ کو cosθ لکھتے ہیں اور ان کی تعریف یوں لکھتے ہیں:

$$\sin\theta = \frac{EP}{OP} = \frac{y}{1} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = y$$

اور

$$\cos\theta = \frac{OE}{OP} = \frac{x}{1} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = x$$

$\sin\theta$ اور $\cos\theta$ اکائی دائرے پر کسی نقطہ $P(x, y)$ کے x- محدد اور y- محدد کہلاتے ہیں۔ مساوات $x = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta$ کو دائروی یا تکونیاتی تفاعل کہتے ہیں جبکہ باقی تکونیاتی تفاعل Tangent، Cotangent، Secant اور Cosecant کو، $\tan\theta$، $\cot\theta$، $\sec\theta$ اور $\text{cosec}\,\theta$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\tan\theta = \frac{EP}{OE} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

$$y = \sin\theta \quad \text{اور} \quad x = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \text{اور} \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \qquad\qquad = \frac{1}{\sin\theta}$$

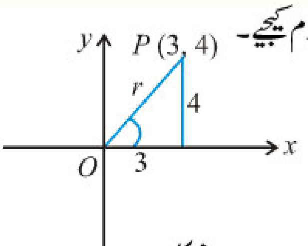
معکوس مماثلتیں

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \quad \text{یا} \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{یا} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \quad \text{یا} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مثال: اگر نقطہ $(3, 4)$ زاویہ θ کے اختتامی بازو پر ہو تو تکونیاتی نسبتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 7.3.4

حل: نقطہ $(3, 4)$ میں $x = 3$ اور $y = 4$

تکونیاتی نسبتوں کے حل کے لیے ہمیں r کی قیمت کی ضرورت ہے

جس کو ہم $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ کی مدد سے معلوم کرتے ہیں جہاں $r = |\overline{OP}|$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

پس

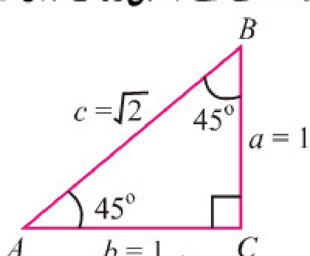
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \quad ; \quad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

7.3(iv) تکونیاتی نسبتوں کی 30°، 45° اور 60° کے زاویوں پر قیمتیں:

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC لیں جس کا زاویہ $m\angle C = 90^\circ$ کا ہو۔ مثلث کے راسوں A، B اور C کے بالمقابل اضلاع کو بالترتیب a، b اور c سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 7.3.5

(i) 45° کے زاویے کی تکونیاتی نسبتیں:

جب $m\angle A = 45^\circ$ جبکہ $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ریڈین، چونکہ کسی مثلث میں

تمام زاویوں کا مجموعہ $= 180^\circ$ اس لیے $m\angle B = 45^\circ$

تکونیاتی نسبتوں کی قیمت کا انحصار زاویہ کی مقدار پر ہے نہ کہ مثلث کی جسامت پر۔ آسانی کے لیے ہم $a = b = 1$ لیتے ہیں۔ اس طرح بننے والی مثلث مساوی الساقین مثلث ہو گی۔

مسئلہ فیثاغورث کے مطابق

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2$$
$$c^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}$$

دی گئی مثلث کے مطابق

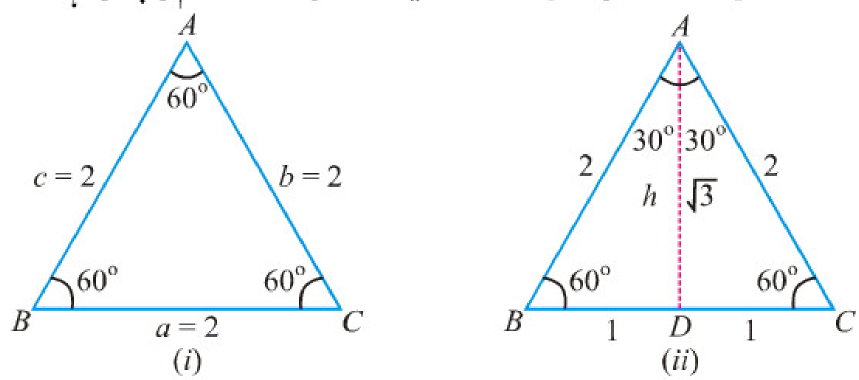
$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1 \; ; \quad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

(ii) جب $m\angle A = 30^\circ$ یا $m\angle A = 60^\circ$ ہو۔

ایک مساوی الاضلاع مثلث بنائیں جس میں آسانی کے لیے $a = b = c = 2$ لیں۔ چونکہ مساوی الاضلاع مثلث میں تمام زاویوں کی مقدار برابر ہوتی ہے اور ان کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ ہر زاویہ 60° کا ہوتا ہے۔ اِس مثلث کے $\angle A$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنے والی لائن مثلث کو دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں تبدیل کرتی ہے جس میں باقی دو زاویے 30° اور 60° کے برابر ہوں گے۔ مثلث کی بلندی $|\overline{AD}|$ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے معلوم کی جا سکتی ہے۔



شکل 7.3.6

$$(AD)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 \;\Rightarrow\; (AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2$$
$$\Rightarrow\; h^2 = (2)^2 - (1)^2 = 3$$
$$\Rightarrow\; h = \sqrt{3}$$

مثلث ADB کے مطابق جبکہ $m\angle A = 30^\circ$ ہو۔

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\tan 30^o = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\cot 30^o = \frac{1}{\tan 30^o} = \sqrt{3}$

مثلث ABD کے مطابق جبکہ $m\angle B = 60^o$ ہو۔

$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{cosec} 60^o = \frac{1}{\sin 60^o} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sec 60^o = \frac{1}{\cos 60^o} = 2$

$\tan 60^o = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ $\qquad$ $\cot 60^o = \frac{1}{\tan 60^o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

7.3(v) مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامات:

تکونیاتی نسبتوں $\sin\theta$، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ میں اگر θ ربع زاویہ نہ ہو تو θ کسی ایک خاص ربع میں ہو گا۔ چونکہ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہمیشہ مثبت عدد ہوتا ہے اور اگر θ کا ربع معلوم ہو تو ہم کسی بھی تکونیاتی نسبت کی علامت معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) اگر θ پہلے ربع میں ہو اور نقطہ $P(x, y)$، زاویہ θ کے اختتامی بازو پر واقع ہو تو x- اور y- محدد دونوں مثبت ہوں گے۔ لہٰذا پہلے ربع میں تمام تکونیاتی نسبتیں مثبت ہوں گی۔

(ii) اگر θ دوسرے ربع میں ہو تو نقطہ $P(x, y)$ میں x– محدد منفی اور y- محدد مثبت ہو گا۔

اس لیے $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$ یا منفی ہے $\qquad$ $\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$ یا مثبت ہے

اور $\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$ یا منفی ہے

(iii) جب θ تیسرے ربع میں ہو تو نقطہ $P(x, y)$ کے x- محدد اور y- محدد منفی ہونگے۔

اس لیے $\cos\theta = \frac{x}{r}$ یا منفی ہے $\qquad$ $\sin\theta = \frac{y}{x} < 0$ یا منفی ہے

اور $\tan\theta = \frac{y}{x} > 0$ یا مثبت ہے

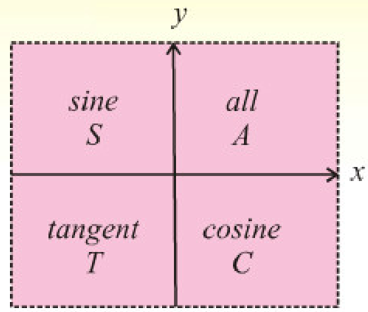
(iv) جب θ چوتھے ربع میں ہو تو نقطہ $P(x, y)$ کا x- محدد مثبت اور y- محدد منفی ہو گا۔

اس لیے $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$ یا مثبت ہے $\qquad$ $\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$ یا منفی ہے

اور $\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$ یا منفی ہے

تکونیاتی نسبتوں کی علامات کا خلاصہ نیچے دیا گیا ہے۔

دوسرا ربع	پہلا ربع
$\sin > 0$, $\text{cosec} > 0$	$\sin > 0$, $\text{cosec} > 0$
$\cos < 0$, $\sec < 0$, $\tan < 0$, $\cot < 0$	$\cos > 0$, $\sec > 0$, $\tan > 0$, $\cot > 0$
تیسرا ربع	**چوتھا ربع**
$\tan > 0$, $\cot > 0$	$\cos > 0$, $\sec > 0$
$\sin < 0$, $\text{cosec} < 0$, $\cos < 0$, $\sec < 0$	$\sin < 0$, $\text{cosec} < 0$, $\tan < 0$, $\cot < 0$



7.3(vi) تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا جبکہ ایک تکونیاتی نسبت دی ہوئی ہو:

تکونیاتی نسبتوں کی قیمت معلوم کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے کی گئی ہے۔

مثال 1: اگر $\sin\theta = \frac{-3}{4}$ اور $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ہو تو $\tan\theta$، $\cot\theta$، $\sec\theta$ اور $\text{cosec}\,\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہم دو مماثلات (Identities) استعمال کرتے ہیں جو باقی تکونیاتی تفاعل کو sine اور cosine میں ظاہر کرتے ہیں۔

$$\because \quad \sin\theta = \frac{-3}{4} \quad \therefore \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{-3}{4}} = \frac{-4}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{-4}{3}$$

$$\because \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \therefore \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \quad \Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

اب

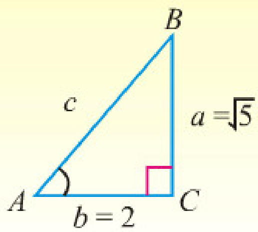
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{-3}{\sqrt{7}} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{-3}{\sqrt{7}}$$

اور

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{-3}{\sqrt{7}}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

مثال 2: اگر $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{5},\ b = 2$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{5})^2 + (2)^2 = c^2$$

$$c^2 = 5 + 4 = 9 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 3 \quad \text{یا} \quad c = 3$$

$$\because \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cot\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad , \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{2}{3} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{1}{\frac{2}{3}} \quad \therefore \quad \sec\theta = \frac{3}{2}$$

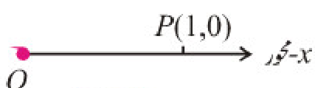
7.3(vii) 0°، 90°، 180°، 270° اور 360° کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا:

آرٹیکل 7.3(ii) میں ہم ربع زاویوں کو زیر بحث لائے تھے۔ اگر زاویہ θ کا اختتامی بازو x- محور یا y- محور پر ہو تو θ ربع زاویہ کہلاتا ہے۔

(i) جب $\theta = 0^\circ$

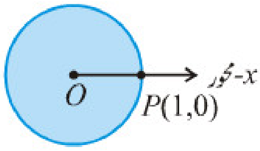
ایک نقطہ $P\ (1, 0)$ زاویہ 0° کے اختتامی بازو پر ہے، ہم ایک اکائی دائرہ بنا سکتے ہیں جس میں زاویہ 0° کے اختتامی بازو پر نقطہ $P\ (1, 0)$ ہو۔

$$P\ (1, 0) \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{اور} \quad y = 0 \qquad \text{پس} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 0} = 1$$



$$\therefore \quad \sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{(ناقابل تعریف)}$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1$$



$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{(ناقابل تعریف)}$$

(ii) جب $\theta = 90^\circ$

اس صورت میں نقطہ $P\ (0, 1)$ زاویہ 90° کے اختتامی بازو پر ہوتا ہے۔

$x = 0$ اور $y = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1$

اس لیے $\quad \sin 90^\circ = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{1} = 1$

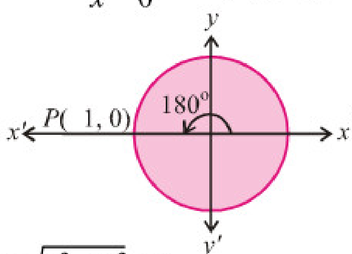
یہ کہ $\quad \sin 90^\circ = 1$ اور $\operatorname{cosec} 90^\circ = \dfrac{r}{y} = 1$

معکوس مماثلات کی رو سے

$\cos 90^\circ = \dfrac{x}{r} = \dfrac{0}{1} = 0 \quad , \quad \sec 90^\circ = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

$\tan 90^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف) $, \ \cot 90^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{1} = 0$

(iii) جب $\theta = 180^\circ$



نقطہ $P\ (-1, 0)$ زاویہ 180° کے اختتامی بازو x- محور پر ہوتا ہے جب کہ $x = -1$ اور $y = 0$

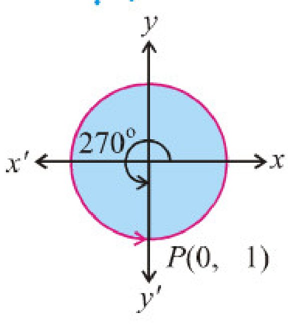
$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\therefore \quad \sin 180^\circ = \dfrac{y}{r} = \dfrac{0}{1} = 0 \quad ; \quad \operatorname{cosec} 180^\circ = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

$\cos 180^\circ = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{1} = -1 \quad ; \quad \sec 180^\circ = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\tan 180^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{-1} = 0 \quad ; \quad \cot 180^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

(iv) جب $\theta = 270^\circ$ اور نقطہ $P\ (0, -1)$، y'- محور پر ہو یا زاویہ 270° کے اختتامی بازو پر ہو۔



جب کہ $y = -1$ اور $x = 0$

اس طرح $\quad r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1$

$\therefore \quad \sin 270^\circ = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-1}{1} = -1 \quad ; \quad \operatorname{cosec} 270^\circ = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\cos 270^\circ = \dfrac{x}{r} = \dfrac{0}{1} = 0 \quad ; \quad \sec 270^\circ = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

$\tan 270^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{0} = -\infty \quad ; \quad \cot 270^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{-1} = 0$

(iv) جب $\theta = 360^o$ ہو تو نقطہ P (1, 0) ایک دفعہ پھر x-محور پر ہوگا۔

اب

$\sin 360^o = \sin 0^o = 0 \quad ; \quad \operatorname{cosec} 360^o = \dfrac{1}{\sin 360^o} = \dfrac{1}{\sin 0^o} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

$= \sin(360^o + 0^o)$

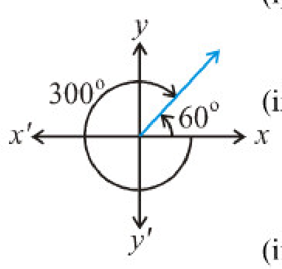
$\cos 360^o = \cos 0^o = 1 \quad ; \quad \sec 360^o = \dfrac{1}{\cos 0^o} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\tan 360^o = \tan 0^o = 0 \quad ; \quad \cot 360^o = \dfrac{1}{\tan 0^o} = \dfrac{1}{0} = \infty$ (ناقابل تعریف)

مثال: جدول یا کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\cos 540^o$ (ii) $\sin 315^o$ (iii) $\sec(-300^o)$

حل:



(i) $540^o = (360^o + 180^o) = 2(1)\pi + 180^o$

$\cos 540^o = \cos(2\pi + \pi) = \cos\pi = -1$

(ii) $\sec 315^o = \sin(360^o - 45^o) = \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\sec(-300^o) = \sec(-360^o + 60^o)$

$= \sec(2(-1)\pi + 60^o)$

$= \sec 60^o = \dfrac{1}{\cos 60^o} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

مشق 7.3

-1 مندرجہ ذیل زاویوں کو پروٹریکٹر (زاویہ پیما) یا فری ہینڈ طریقہ کی مدد سے معیاری حالت میں ظاہر کریں۔ نیز ہر زاویے کا مثبت اور منفی ہم بازوزاویہ بھی معلوم کریں۔

(i) 170^o (ii) 780^o (iii) -100^o (iv) -500^o

-2 قریب ترین ربع زاویوں کی شناخت کریں جن کے درمیان مندرجہ ذیل زاویے ہوں۔

(i) 156^o (ii) 318^o (iii) 572^o (iv) -330^o

-3 قریب ترین ربع زاویے لکھیے جن کے درمیان مندرجہ ذیل زاویے ہوں۔ اپنا جواب ریڈین میں لکھیں۔

(i) $\dfrac{\pi}{3}$ (ii) $\dfrac{3\pi}{4}$ (iii) $\dfrac{-\pi}{4}$ (iv) $\dfrac{-3\pi}{4}$

4- زاویہ θ کس ربع میں ہو گا جبکہ

(i) $\sin\theta > 0\ ,\ \tan\theta < 0$ (ii) $\cos\theta < 0\ ,\ \sin\theta < 0$

(iii) $\sec\theta > 0\ ,\ \sin\theta < 0$ (iv) $\cos\theta < 0\ ,\ \tan\theta < 0$

(v) $\text{cosec}\,\theta > 0\ ,\ \cos\theta > 0$ (vi) $\sin\theta < 0\ ,\ \sec\theta < 0$

5- خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $\cos(-150^{o}) = \ldots\ldots\ \cos 150^{o}$ (ii) $\sin(-310^{o}) = \ldots\ldots\ \sin 310^{o}$

(iii) $\tan(-210^{o}) = \ldots\ldots\ \tan 210^{o}$ (iv) $\cot(-45^{o}) = \ldots\ldots\ \cot 45^{o}$

(v) $\sec(-60^{o}) = \ldots\ldots\ \sec 60^{o}$ (vi) $\text{cosec}\,(-137^{o}) = \ldots\ldots\ \text{cosec}\,137^{o}$

6- دیا گیا نقطہ، زاویہ θ کے اختتامی بازو پر واقع ہے۔ زاویہ θ کا ربع معلوم کیجیے اور تمام چھ تکونیاتی نسبتیں بھی معلوم کیجیے۔

(i) $(-2, 3)$ (ii) $(-3, -4)$ (iii) $(\sqrt{2}, 1)$

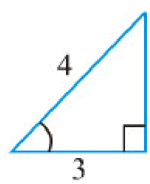
7- اگر $\cos\theta = \frac{-2}{3}$ اور زاویہ θ کا اختتامی بازو دوسرے ربع میں ہو تو باقی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

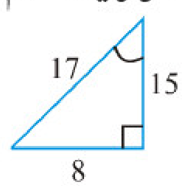
8- اگر $\tan\theta = \frac{4}{3}$ اور $\sin\theta < 0$ ہو تو باقی تکونیاتی تفاعل کی θ پر قیمت معلوم کریں۔

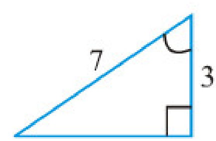
9- اگر $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ اور زاویہ θ کا اختتامی بازو تیسرے ربع میں نہ ہو تو $\tan\theta$، $\sec\theta$ اور $\text{cosec}\,\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

10- اگر $\text{cosec}\,\theta = \frac{13}{12}$ اور $\sec\theta > 0$ ہو تو باقی تکونیاتی تفاعل کی قیمت معلوم کیجیے۔

11- دی ہوئی قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں تکونیاتی تفاعل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) 

(ii) 

(iii) 

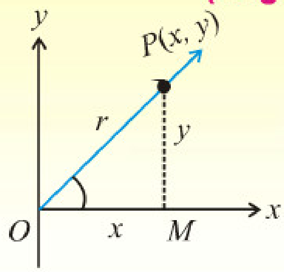
12- تکونیاتی تفاعل کی قیمت معلوم کیجیے۔ تکونیاتی جدول (Tables) اور کیلکولیٹر استعمال نہ کریں۔

(i) $\tan 30^{o}$ (ii) $\tan 330^{o}$ (iii) $\sec 330^{o}$ (iv) $\cot\frac{\pi}{4}$

(v) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (vi) $\text{cosec}\,\frac{2\pi}{3}$ (vii) $\cos(-450^{o})$ (viii) $\tan(-9\pi)$

(ix) $\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ (x) $\sin\frac{7\pi}{6}$ (xi) $\cot\frac{7\pi}{6}$ (xii) $\cos 225^{o}$

7.4 تکونیاتی مماثلات (Trigonometric Identities)



سیکشن 7.3 میں ہم نے تکونیاتی فنکشنز (تفاعل) اور ان کے معکوس پر بحث کی۔ کوئی زاویہ $\angle MOP = \theta$ ریڈین معیاری حالت میں لیں۔ زاویہ کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(x, y)$ لیں۔
قائمۃ الزاویہ مثلث OMP میں مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(i)}$$

(i) کو r^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

$$\left(\because \ \sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \qquad (1)$$

(i) کو x^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \qquad \because \ \tan\theta = \frac{y}{x} \ \text{اور} \ \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta} \ \text{یا} \ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \qquad (2)$$

(i) کو ایک دفعہ پھر y^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2 \qquad \because \ \cot\theta = \frac{x}{y} \ \text{اور} \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$

$$\Rightarrow \quad (\cot\theta)^2 + 1 = (\operatorname{cosec}\theta)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta} \ \text{یا} \ \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1 \qquad (3)$$

مماثلات (1)، (2) اور (3) فیثا غورث مماثلات کہلاتی ہیں۔

یہ بنیادی مماثلات تکونیاتی تفاعل (Functions) کو مختصر کرنے کے لیے استعمال کی جاتی ہیں۔

مثال 1: ثابت کیجیے کہ $\cot\theta\sec\theta = \operatorname{cosec}\theta$

حل: دائیں طرف کی مثلثی نسبتوں کو sine اور cosine میں بدلنے سے

$$\text{L.H.S} = \cot\theta\sec\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S}$$

مثال 2: ثابت کیجیے کہ $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \tan^2\theta\sec^2\theta$

حل: $\because \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$$\text{L.H.S} = \tan^4\theta + \tan^2\theta = \tan^2\theta(\tan^2\theta + 1)$$
$$= \tan^2\theta\sec^2\theta$$
$$= \text{R.H.S}$$

مثال 3: ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\cot^2\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} = \operatorname{cosec}\alpha + 1$

حل: $\left(\begin{array}{l}\because \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1\\ \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1\end{array}\right)$

$$\text{L.H.S} = \frac{\cot^2\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - 1}$$
$$= \frac{(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)}{\operatorname{cosec}\alpha - 1} = \frac{(\operatorname{cosec}\alpha - 1)(\operatorname{cosec}\alpha + 1)}{(\operatorname{cosec}\alpha - 1)}$$
$$= \operatorname{cosec}\alpha + 1 = \text{R.H.S}$$

مثال 4: تکونیاتی تفاعل (Functions) کو $\tan\theta$ کی شکل میں بیان کریں۔

حل: معکوس مماثل (Identity) استعمال کر کے ہم $\cot\theta$ کو $\tan\theta$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ جیسا کہ

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مماثلت $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ کو حل کرنے سے

$$\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

چونکہ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$

کیونکہ $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

اس لیے $\sin\theta = \tan\theta\left(\dfrac{1}{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}\right) = \dfrac{\tan\theta}{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}}{\tan\theta}$$

نوٹ: ہم تمام تکونیاتی فنکشنز کو صرف ایک تکونیاتی فنکشن میں بیان کر سکتے ہیں۔

مشق نمبر 7.4

1 تا 6 تک دیے گئے سوالات میں جملوں کو مختصر کر کے ایک تکونیاتی تفاعل میں لکھیے۔

1. $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ 2. $\tan x \sin x \sec x$ 3. $\dfrac{\tan x}{\sec x}$

4. $1 - \cos^2 x$ 5. $\sec^2 x - 1$ 6. $\sin^2 x \,.\, \cot^2 x.$

7 تا 24 تک دیے گئے سوالات میں مماثلات کو ثابت کریں۔

7. $(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta) = \cos^2\theta$ 8. $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = 1 + \tan\theta$

9. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$

10. $(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)(\tan\theta - \sin\theta) = \sec\theta - \cos\theta$

11. $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\tan^2\theta - 1} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ 12. $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$

13. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta \sin\theta$ 14. $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

15. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

16. $(\tan\theta + \cot\theta)(\cos\theta + \sin\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$

17. $\sin\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \sec\theta$ 18. $\dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta$

19. $\dfrac{1}{1 - \cos\theta} + \dfrac{1}{1 + \cos\theta} = 2\operatorname{cosec}^2\theta$

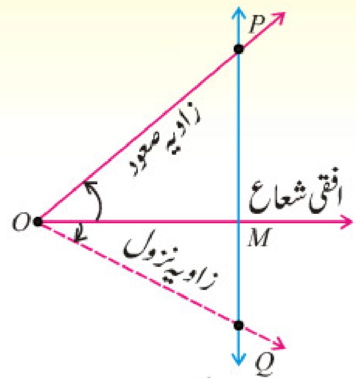
20. $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} - \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = 4\tan\theta \sec\theta$

21. $\sin^3\theta = \sin\theta - \sin\theta \cos^2\theta$ 22. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

23. $\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$ 24. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}} = \dfrac{\sec\theta + 1}{\tan\theta}$

7.5 زاویہ صعود اور زاویہ نزول
(Angle of Elevation and Angle of Depression)

تکونیات کا ایک اہم مقصد بغیر پیمائش کیے نقاط کے درمیان فاصلے یا بلندیاں معلوم کرنا ہے۔

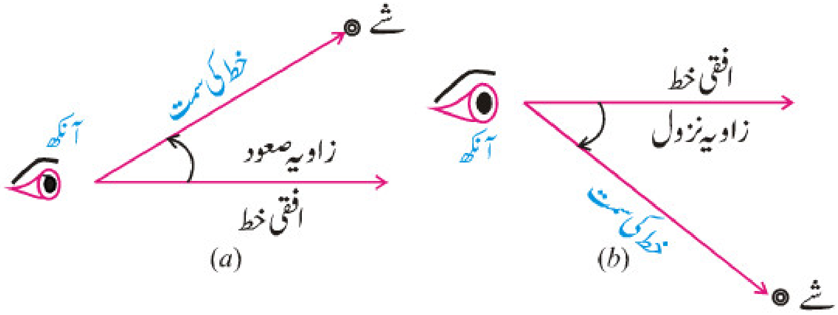


شکل 7.5.1

زاویہ صعود (Angle of Elevation)

فرض کریں کہ O، P اور Q تین نقاط ہیں اس طرح کہ نقطہ P نقطہ O کی سطح سے بلند ہو اور نقطہ Q نقطہ O کی سطح سے نیچے ہو۔

عمودی خط PQ نقطہ P اور Q میں سے کھینچیے اور ایک افقی خط OM کھینچیے۔ نقطہ O سے نقطہ P کو دیکھیں تو بننے والا زاویہ MOP، **زاویہ صعود** کہلاتا ہے۔ O سے نقطہ Q کو دیکھنے کے لیے ہمیں اپنی آنکھیں نیچے کی طرف جھکانا پڑتی ہیں اور $\angle MOQ$ **زاویہ نزول** کہلاتا ہے۔

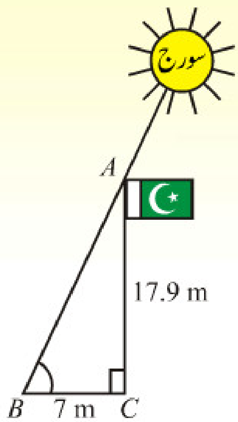


شکل 7.5.2

7.5(i) زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کرنا:
(Find Angle of Elevation and Angle of Depression)

فاصلے، بلندیاں اور زاویے معلوم کرنے کے لیے ہم تکونیاتی تفاعل استعمال کرتے ہیں۔ درج ذیل مثالیں ملاحظہ کریں۔

مثال 1: ایک جھنڈے کے پول کی اونچائی 17.9 میٹر ہے جبکہ اس کے سائے کی لمبائی 7 میٹر ہے۔ سورج کا زاویہ صعود معلوم کیجیے۔



حل: تصویر سے واضح ہوتا ہے کہ α زاویہ صعود ہے۔

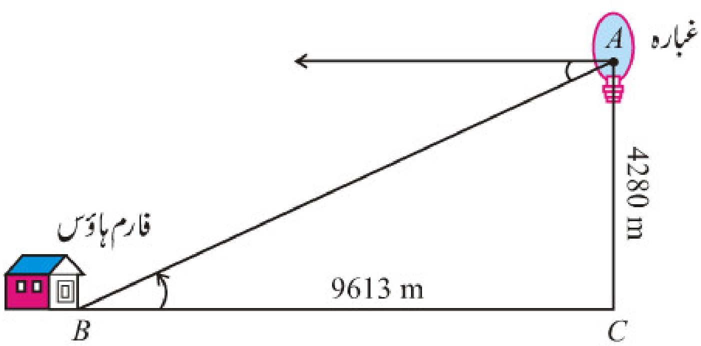
لہٰذا $\tan\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{17.9}{7} \approx 2.55714$

α کی قیمت معلوم کرنے کے لیے

$$\alpha \approx \tan^{-1}(2.55714)$$
$$\approx (68.6666)^{\circ} \approx 68^{\circ}\,40'$$
$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 68^{\circ}\,40'$$

مثال 2: ایک مشاہداتی غبارے کی اونچائی سطح زمین سے 4280 میٹر اور ایک فارم ہاؤس سے 9613 میٹر کی دوری پر ہے۔ مشاہداتی غبارے سے فارم ہاؤس کا زاویہ نزول معلوم کیجیے۔

حل:



اس قسم کے سوالات میں B سے A کا زاویہ صعود اور A سے B کے زاویہ نزول کو برابر لیا جائے گا۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\tan\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{4280}{9613} \approx 0.44523$$
$$\alpha = \tan^{-1}(0.44523) = 24^{\circ}$$

پس زاویہ نزول 24° ہے۔

مشق 7.5

-1 سورج کا زاویہ صعود معلوم کیجیے جبکہ ایک 6 فٹ لمبے آدمی کا سایہ 3.5 فٹ ہے۔

-2 ایک درخت کا سایہ 40 میٹر ہے جبکہ سورج کا زاویہ صعود 25° ہے۔ درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔

-3 ایک 20 فٹ لمبی سیڑھی دیوار کے ساتھ لگائی گئی ہے جبکہ سیڑھی اور دیوار کا درمیانی فاصلہ 5 فٹ ہے۔ سیڑھی کا زاویہ صعود معلوم کیجیے جو وہ سطح زمین کے ساتھ بناتی ہے۔

-4 ایک مستطیل کا قاعدہ 25 فٹ اور بلندی 13 فٹ ہے۔ مستطیل کے وتر کا زاویہ صعود معلوم کیجیے جو وہ مستطیل کے قاعدے کے ساتھ بناتا ہے۔

-5 زمین سے 80° کے مستقل زاویے پر ایک راکٹ چھوڑا گیا ہے۔ 5000 میٹر کا فاصلہ طے کرنے کے بعد راکٹ کی زمین سے بلندی معلوم کیجیے۔

-6 پائلٹ 4000 میٹر کی بلندی پر جہاز اڑا رہا ہے۔ وہ جہاز کو 50° کے زاویے پر ایئرپورٹ پر اتارنا چاہتا ہے۔ ایئرپورٹ سے کتنی دوری سے پائلٹ جہاز کو اتارنا شروع کرے گا؟

-7 ایک پول کے درمیان سے ایک تار زمین کے ساتھ 78.2° کا زاویہ بناتی ہے۔ تار کا سطح زمین پر پول سے فاصلہ 3 میٹر ہے۔ پول کی بلندی معلوم کیجیے۔

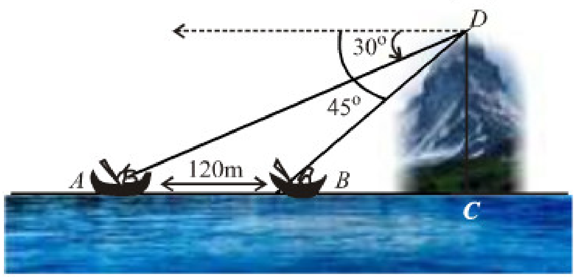
-8 ایک سڑک سطح سمندر سے 5.7° کا زاویہ ڈھلوان کے ساتھ بناتی ہے۔ فرض کریں کہ ہم سڑک پر اونچائی کی جانب 2 میل کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ بتایئے ہم سطح سمندر سے کتنی بلندی پر ہوں گے؟

-9 ٹیلی وژن کا انٹینا جس کی بلندی 8 فٹ ہے، ایک مکان کی چھت پر نصب ہے۔ زمین سے مکان کی چھت کا زاویہ صعود 17° اور انٹینا کا زاویہ صعود 21.8° ہے۔ مکان کی بلندی معلوم کریں۔

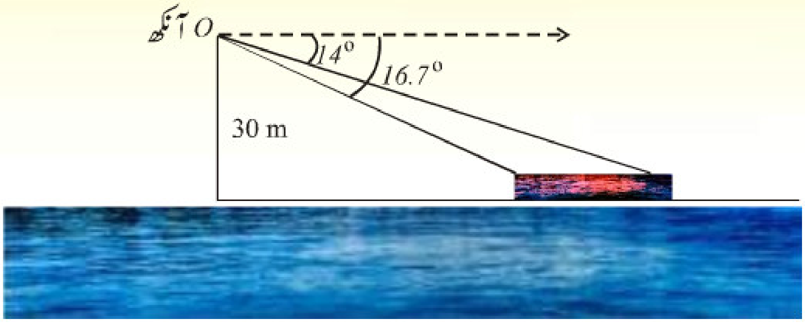
-10 ایک مشاہداتی مقام سے دو کشتیوں کا زاویہ نزول بالترتیب 30° اور 45° ہے۔ اگر مشاہداتی مقام کی بلندی 4000 فٹ ہو تو دونوں کشتیوں کے درمیان فاصلہ کتنا ہوگا؟

-11 ایک عمودی چٹان کے پائے سے دو جہاز ایک دوسرے سے 120 میٹر کے فاصلے پر ہیں، چٹان کی چوٹی سے جہازوں کا زاویہ نزول بالترتیب 30° اور 45° ہے، جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(a) BC فاصلہ معلوم کریں۔ (b) چٹان کی بلندی CD معلوم کریں۔



-12 ہم دریا کی سطح سے 30 فٹ کی بلندی پر ایک پل پر کھڑے دریا میں تیرتے ہوئے لکڑی کے ٹکڑے کو دیکھ رہے ہیں۔ اگر لکڑی کے ٹکڑے کے اگلے سرے کے ساتھ زاویہ 16.7^o اور پچھلے سرے کے ساتھ زاویہ 14^o ہو تو ٹکڑے کی لمبائی معلوم کیجیے۔



متفرق مشق 7

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) دو غیر ہم خط شعاعوں جن کا ایک سرا مشترک ہو، کا مجموعہ .... کہلاتا ہے۔

(a) زاویہ (b) ڈگری (c) منٹ (d) ریڈین

(ii) پیمائش کا نظام جس میں زاویہ کی پیمائش ریڈین میں کی جاتی ہے .... سسٹم کہلاتا ہے۔

(a) سی جی ایس سسٹم (b) ساٹھ کے اساس کا نظام

(c) ایم کے ایس سسٹم (d) دائروی نظام

(iii) $\text{--------} = 20^o$

(a) $360'$ (b) $630'$ (c) $1200'$ (d) $3600'$

(iv) $\frac{3\pi}{4}$ ریڈین =

(a) 115^o (b) 135^o (c) 150^o (d) 30^o

(v) اگر $\tan\theta = \sqrt{3}$ ہو تو $\theta =$ ________

(a) 90^o (b) 45^o (c) 60^o (d) 30^o

(vi) $\sec^2\theta =$ ________

(a) $1-\sin^2\theta$ (b) $1+\tan^2\theta$ (c) $1+\cos^2\theta$ (d) $1-\tan^2\theta$

(vii) $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} =$ ________

(a) $2\sec^2\theta$ (b) $2\cos^2\theta$ (c) $\sec^2\theta$ (d) $\cos\theta$

(viii) $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}45^{\circ} =$ ________

(a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ix) $\sec\theta\cot\theta =$ ________

(a) $\sin\theta$ (b) $\frac{1}{\cos\theta}$ (c) $\frac{1}{\sin\theta}$ (d) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(x) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta =$ ________

(a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) $\tan\theta$

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) زاویہ کی تعریف کیجیے۔

(ii) زاویوں کی پیائش کا ساٹھ کے اساس کا نظام کیا ہے؟

(iii) دو قائمۃ الزاویوں میں کل کتنے منٹس ہوتے ہیں؟

(iv) زاویہ کی ریڈین میں تعریف کیجیے۔

(v) $\frac{\pi}{5}$ کو ڈگری میں تبدیل کیجیے۔

(vi) 15° کو ریڈین میں تبدیل کیجیے۔

(vii) دائرے پر قوس کی لمبائی 50 میٹر اور اِس کا رداس 25 میٹر ہے مرکز پر بننے والا زاویہ کتنے ریڈین کا ہوگا؟

(viii) جب میٹر $l = 56$ اور $\theta = 45^{\circ}$ ہو تو r کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ix) اگر $\cos\theta = \frac{9}{41}$ اور θ کا اختتامی بازو چوتھے ربع میں ہو تو $\tan\theta$ معلوم کیجیے۔

(x) ثابت کیجیے کہ $(1 - \sin^2\theta)(1 + \tan^2\theta) = 1$

-3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) ریڈین $\pi =$ ________ ڈگری۔

(ii) 235° کا اختتامی بازو ________ ربع میں ہے۔

(iii) -30° کا اختتامی بازو ________ ربع میں ہے۔

(iv) دائروی علاقہ کا رقبہ ________ ہے۔

(v) اگر سم $r = 2$ اور ریڈین $\theta = 3$ ہو تو دائروی علاقہ کا رقبہ ________ ہے۔

(vi) 480° زاویے کی معیاری حالت ________ ہے۔

(vii) اگر $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ہو تو $\theta =$ __________

(viii) اگر $\theta = 300^\circ$ ہو تو $\sec(-300)^\circ =$ _________

(ix) $1 + \cot^2\theta =$ ________

(x) $\sec\theta - \tan\theta =$ ________

خلاصہ

- اگر دائرے کے محیط کو 360 برابر قوسوں میں تقسیم کریں تو دائرے کے مرکز پر ایک قوس سے بننے والے زاویوں کو ایک **ڈگری** کہتے ہیں اور اس کو 1° سے ظاہر کرتے ہیں۔
- دائرے کے مرکز پر ایک قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہو، سے بننے والے زاویے کی مقدار ایک **ریڈین** کہلاتا ہے۔
- ریڈین اور ڈگری کے درمیان تعلق

$$1 \text{ ریڈین} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295^\circ \quad \text{اور} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین} \approx 0.0175 \text{ ریڈین}$$

- مرکزی زاویہ اور دائرے کی قوس کی لمبائی میں تعلق $l = r\theta$ ہے۔
- دائروی قطاع کا رقبہ : $A = \frac{1}{2}r^2\theta$
- دو یا دو سے زیادہ زاویے جن کے ابتدائی بازو اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں، **کوٹرمینل زاویے** کہلاتے ہیں۔
- اگر کسی زاویے کا اختتامی بازو x - محور یا y- محور پر ہو تو اس زاویے کو **ربع زاویہ** کہتے ہیں۔
- اگر عمومی زاویے کا راس (Vertex)، مبدا (Origin) پر ہو اور ابتدائی بازو مستوی میں x- محور کی مثبت سمت میں ہو ایسا زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے۔
- بنیادی طور پر تکونیاتی نسبتیں چھ ہیں۔ جن کو Secant ،Cotangent ،Tangent ،Cosine ،Sine اور Cosecant کہتے ہیں۔
- تکونیاتی مماثلات:

(a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (b) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(c) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

یونٹ 8

مثلث کے ایک ضلع کا ظِل (سایہ)

(PROJECTION OF A SIDE OF A TRIANGLE)

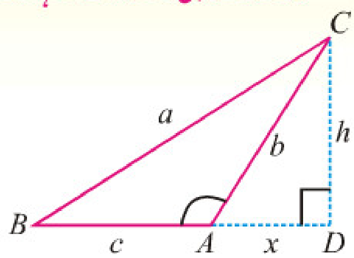
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے اور دو چند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے سے کم دو چند (دو گنا) مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں کوئی سے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ، تیسرے نصف ضلع کے مربع اور اس کے وسطانیہ کے مربع کے مجموعے کا دوچند (دو گنا) ہوتا ہے۔

مسئلہ 1

8.1(i) کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے اور دو چند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: ABC ایک مثلث ہے جسکے نقطہ A پر BAC منفرجہ زاویہ ہے۔ بڑھے ہوئے ضلع $\overline{BA}$ پر $\overline{CD}$ عمود ہے۔ اس طرح ضلع $\overline{AC}$ کا بڑھے ہوئے $\overline{BA}$ پر $\overline{AD}$ ظِل ہے۔

فرض کریں $AB = c$ ، $CA = b$ ، $BC = a$ ، $AD = x$ اور $CD = h$

مطلوب: $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 + 2(m\overline{AB})\ (m\overline{AD})$

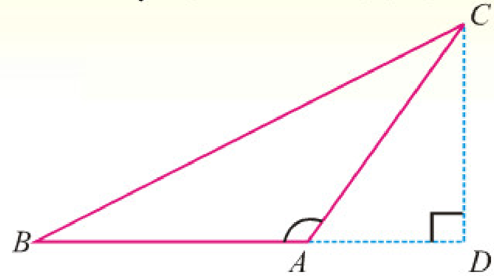
یعنی $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ مثلث CDA میں	
$m\angle CDA = 90^\circ$	معلوم
$\therefore\ (AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یا $b^2 = x^2 + h^2$ (i)	
قائمۃ الزاویہ مثلث CDB میں	
$m\angle CDB = 90^\circ$	معلوم
$\therefore\ (BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یا $a^2 = (c + x)^2 + h^2$	$BD = BA + AD$
$= c^2 + 2cx + x^2 + h^2$ (ii)	
پس $a^2 = c^2 + 2cx + b^2$	(i) اور (ii) کی رو سے

یعنی	$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$
یا	$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$

مثال: مثلث ΔABC میں $\angle A$ منفرجہ ہے۔ اگر $m\overline{AC} = m\overline{AB}$ ہو تو ثابت کریں کہ $(BC)^2 = 2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$ جبکہ بڑھے ہوئے ضلع $\overline{BA}$ پر $\overline{CD}$ عمود ہو۔



معلوم: مثلث ΔABC میں $\angle A$ منفرجہ ہے۔ $m\overline{AC} = m\overline{AB}$ اور بڑھے ہوئے ضلع $\overline{BA}$ پر $\overline{CD}$ عمود ہے۔

مطلوب: $(BC)^2 = 2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$(BC)^2 = (BA)^2 + (AC)^2 + 2(m\overline{BA})(m\overline{AD})$	مسئلہ 1 کی رو سے
$= (AB)^2 + (AB)^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$	معلوم
$= 2(AB)^2 + 2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$	
$(BC)^2 = 2m\overline{AB}(m\overline{AB} + m\overline{AD})$	نقطہ A قطعہ خط $\overline{BD}$ پر واقع ہے۔
$= 2(m\overline{AB})\ (m\overline{BD})$	

مشق 8.1

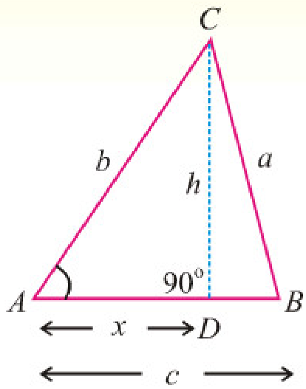
-1 اگر $m\overline{AC} = 1\text{cm}$، $m\overline{BC} = 2\text{cm}$ اور $m\angle C = 120^\circ$ تو ضلع AB کی لمبائی اور ΔABC کا رقبہ معلوم کریں۔

(اشارہ) $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 + 2\, m\overline{AC}.\ m\overline{CD}$ جبکہ $(m\overline{CD}) = (m\overline{BC}) \cos (180^\circ - m\angle C)$

-2 اگر مثلث ABC میں $\overline{BC}$ کی لمبائی 6 سم، $\overline{AB}$ کی لمبائی $4\sqrt{2}$ سم اور $m\angle ABC = 135^\circ$ ہو تو $m\overline{AC}$ معلوم کیجیے۔

مسئلہ 2

8.1 (ii) کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے سے کم دوچند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC میں نقطہ A پر $\angle CAB$ حادہ زاویہ ہے۔

فرض کریں۔ $m\overline{BC} = a\ ,\ m\overline{CA} = b\ ,\ m\overline{AB} = c$

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ کھینچا اِس طرح $\overline{AD}$، ضلع $\overline{AC}$ کا $\overline{AB}$ پر ظِل ہے اور

$m\overline{AD} = x\ ,\ m\overline{CD} = h$

مطلوب: $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 - 2(m\overline{AB})\ (m\overline{AD})$

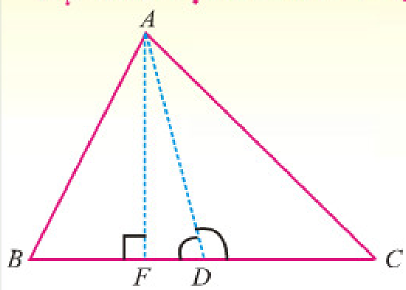
یعنی $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ ΔCDA میں	
$m\angle CDA = 90^\circ$	معلوم
$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یعنی (i) $b^2 = x^2 + h^2$	
قائمۃ الزاویہ $\Delta\ CDB$ میں	
$m\angle CDB = 90^\circ$	معلوم
$(BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
$a^2 = (c-x)^2 + h^2$	بذریعہ شکل
یا (ii) $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$	
$a^2 = c^2 - 2cx + b^2$	(i) اور (ii) کی رو سے
پس $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$	
یعنی $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 - 2(m\overline{AB})\ (m\overline{AD})$	

مسئلہ 3

8.1 (iii) کسی مثلث میں کوئی سے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ، تیسرے نصف ضلع کے مربع اور اس کے وسطانیہ کے مربع کے مجموعے کا دوچند ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ΔABC میں وسطانیہ $\overline{AD}$ ضلع $\overline{BC}$ کی نقطہ D پر تنصیف کرتا ہے۔ یعنی $m\overline{BD} = m\overline{CD}$

مطلوب: $(AB)^2 + (AC)^2 = 2[(BD)^2 + (AD)^2]$

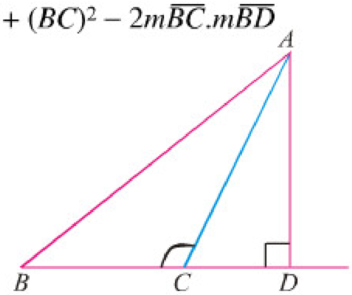
عمل: $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ کھینچا۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔADB میں چونکہ $\angle ADB$ حادہ ہے۔	
$(AB)^2 = (BD)^2 + (AD)^2 - 2m\overline{BD}.\ m\overline{FD}$ (i)	مسئلہ 2 کی رو سے
اب ΔADC میں چونکہ $\angle ADC$ نقطہ D پر منفرجہ زاویہ ہے۔	
$(AC)^2 = (CD)^2 + (AD)^2 + 2m\overline{CD}.\ m\overline{FD}$	مسئلہ 1 کی رو سے
$(AC)^2 = (BD)^2 + (AD)^2 + 2m\overline{BD}\ m\overline{FD}$ (ii)	معلوم
$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(BD)^2 + 2(\overline{AD})^2$ (iii)	(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے
تب	
پس $(AB)^2 + (AC)^2 = 2[(BD)^2 + (AD)^2]$	

مثال 1: ΔABC میں $\angle BCA$ منفرجہ زاویہ ہے۔ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ جبکہ $\overline{BD}$، ضلع $\overline{AB}$ کا $\overline{BC}$ پر ظل ہے۔ ثابت کریں کہ

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC}.m\overline{BD}$$



معلوم: ΔABC میں زاویہ C منفرجہ زاویہ ہے۔ اِس طرح $\angle B$ حادہ زاویہ ہے۔ جبکہ $\overline{BD}$، ضلع $\overline{AB}$ کا بڑھے ہوئے $\overline{BC}$ پر ظل ہے۔

مطلوب: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC} \,.\, m\overline{BD}$

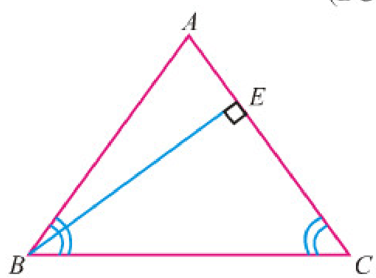
ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ ΔABD میں	
(i) $(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
قائمۃ الزاویہ ΔACD میں	
(ii) $(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$	مسئلہ فیثاغورث
یا $(AC)^2 = (AD)^2 + (BD - BC)^2$	$m\overline{BC} + m\overline{CD} = m\overline{BD}$
(iii) $(AC)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC}\, m\overline{BD}$	
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{BC}\, m\overline{BD}$	(i)اور(iii) کی رو سے

مثال 2: متساوی الساقین ΔABC میں اگر $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ اور $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ہو تو ثابت کریں کہ
$(BC)^2 = 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$

معلوم: متساوی الساقین ΔABC میں $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ اور $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ جبکہ $\overline{CE}$ ضلع $\overline{BC}$ کا $\overline{AC}$ پر ظل ہے۔

مطلوب: $(BC)^2 = 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$



ثبوت:

بیانات	دلائل
متساوی الساقین ΔABC میں $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ اگر $\angle C$ حادہ زاویہ ہو۔ تو	
$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$	مسئلہ 2 کی رو سے
$(AC)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2m\overline{AC}.m\overline{CE}$	$m\overline{AB} = m\overline{AC}$
$\Rightarrow \quad (BC)^2 - 2m\overline{AC}.m\overline{CE} = 0$	دونوں جانب $(AC)^2$ منہا کریں
یا $(BC)^2 = 2m\overline{AC} \,.\, m\overline{CE}$	

مشق 8.2

-1 ΔABC میں ضلع $\overline{BC}$ کی پیمائش کریں جبکہ $m\overline{AB} = 6\text{cm}$ ، $m\overline{AC} = 4\text{cm}$ اور $m\angle A = 60^\circ$ ہے۔

-2 مثلث ABC میں $\overline{AB}$ کی لمبائی 6 سم، $\overline{BC}$ کی لمبائی 8 سم، $\overline{AC}$ کی لمبائی 9 سم اور نقطہ D، $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ ہے۔ وسطانیہ $\overline{BD}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

-3 متوازی الاضلاع $ABCD$ میں ثابت کریں کہ

$$(AC)^2 + (BD)^2 = 2\,[(AB)^2 + (BC)^2]$$

متفرق مشق 8

.1 ΔABC میں $m\angle A = 60^\circ$ ہو تو ثابت کریں کہ $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - m\overline{AB}\,.\,m\overline{AC}$

.2 ΔABC میں $m\angle A = 45^\circ$ ہو تو ثابت کریں کہ $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - \sqrt{2}\,m\overline{AB}\,.\,m\overline{AC}$

-3 ΔABC میں $m\overline{BC}$ معلوم کریں جبکہ $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$ ، $m\overline{AC} = 4\text{ cm}$ اور $m\angle A = 60^\circ$

-4 ΔABC میں $m\overline{AC}$ معلوم کریں جبکہ $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$ اور $m\overline{BC} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ اور $m\angle B = 45^\circ$

-5 ΔABC میں $m\overline{AB} = 10\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 21\text{ cm}$ اور $m\overline{AC} = 17\text{ cm}$ ہو تو $\overline{BC}$ پر ظِل $\overline{AC}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

-6 اگر مثلث ABC میں $m\overline{AB} = 10\text{ cm}$، $m\overline{BC} = 21\text{ cm}$، $m\overline{AC} = 17\text{ cm}$ ہو تو ضلع $\overline{BC}$ پر ظِل $\overline{AB}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

-7 اگر ΔABC میں $a = 17\text{ cm}$، $b = 15\text{ cm}$ اور $c = 8\text{ cm}$ ہو تو $m\angle A$ معلوم کریں۔

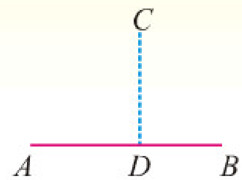
-8 اگر ΔABC میں $a = 17\text{ cm}$، $b = 15\text{ cm}$ اور $c = 8\text{ cm}$ ہو تو $m\angle B$ معلوم کریں۔

-9 مثلث کے اضلاع 5 سم، 7 سم اور 8 سم ہیں۔ کیا وہ حادۃ الزاویہ، منفرجۃ الزاویہ یا قائمۃ الزاویہ ہے؟

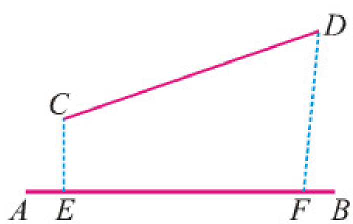
-10 مثلث کے اضلاع 8 سم، 15 سم اور 17 سم ہیں۔ کیا وہ حادۃ الزاویہ، منفرجۃ الزاویہ یا قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟

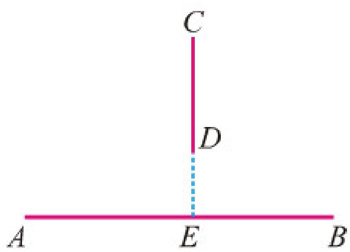
خلاصہ

- کسی نقطہ سے ایک دیے ہوئے قطعہ خط پر عمود کھینچا جائے تو پایۂ عمود کو نقطے کا **ظِل یا سایہ** کہتے ہیں۔ اگر $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ کھینچا جائے تو پایۂ عمود D کو نقطہ C کا ظِل کہیں گے۔



- دیے ہوئے قطعہ خط CD کا کسی دوسرے قطعہ خط AB پر ظِل سے مراد $\overline{EF}$ ہے جو نقطہ E پایۂ عمود C اور نقطہ F پایۂ عمود D، کے درمیان ہوتا ہے، البتہ دے ہوئے عمودی قطعہ خط CD کا ظِل کسی دوسرے قطعہ خط AB پر اس کا ایک نقطہ E ہے جس کی پیمائش صفر ہوتی ہے۔





- کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے اور دوچند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے سے کم دوچند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔
- کسی مثلث میں کوئی سے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ، تیسرے ضلع کے نصف کے مربع اور اس کے وسطانیہ کے مربع کے مجموعے کا دوچند ہوتا ہے۔

یونٹ 9

دائرے کا وَتر

(CHORDS OF A CIRCLE)

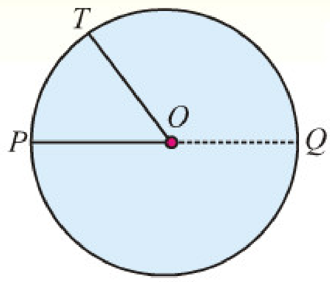
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- تین غیر خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے کسی وَتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے والا قطعہ خط، وَتر پر عمود ہوتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے کسی وَتر پر عمود، اس کی تنصیف کرتا ہے۔
- اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں گے۔
- دائرے کے دو وَتر جو مرکز سے برابر فاصلہ پر ہوں، وہ متماثل ہوتے ہیں۔

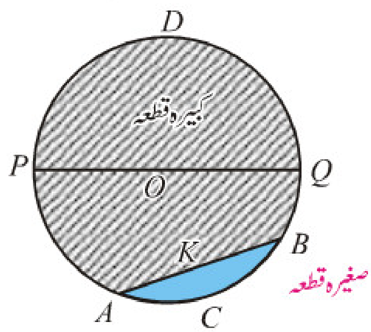
دائِرے کے بنیادی تصورات (Basic Concepts of the Circle)

کسی سطح میں متحرک نقطہ P کا وہ راستہ جو ایک معین نقطہ O سے ہمیشہ یکساں فاصلے پر رہے، **دائِرہ** کہلاتا ہے۔ دائِرہ پر یہ غیر موجود معین نقطہ O دائرے کا **مرکز** جبکہ مُستقل فاصلہ $\overline{OP}$ اِس کا **رداس** یا نصف قطر ہے جبکہ متحرک نقطہ P اس کا **محیط** بناتا ہے۔



شکل (i)

شکل (i) میں رداس کی لمبائی $m\overline{OP} = m\overline{OQ} = m\overline{OT}$ ہے۔ اگر دائِرے کا رداس r ہو تو اِسکا محیط $2\pi r$ ہوتا ہے۔ جبکہ غیر ناطق ہندسہ π کی قیمت، دائرے کے محیط اور اُس کے قطر کی نسبت ہوتی ہے۔



شکل (ii)

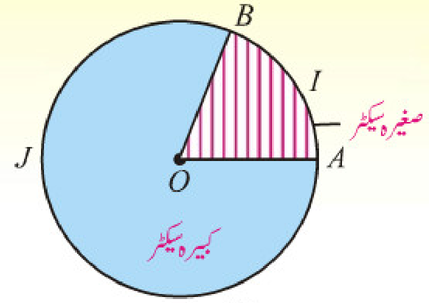
دائرے کے محیط کا ایک ٹکڑا ACB دائِرے کی قوس ہوتی ہے۔ محیط پر دیے ہوئے دو نقاط کا ملانے وَالا قطعہ خط AKB ایک وَتر ہے جبکہ مرکز سے گزرنے وَالا وَتر POQ دائرے کا قطر ہوتا ہے۔

دائِرے کا وہ خطہ جو اس کی قوس اور متعلقہ وَتر نے گھیرا ہو، قطعہ دائِرہ ہوتا ہے۔ شکل (ii) میں دکھایا گیا سیاہ خطہ، صغیرہ قطعہ دائرہ اور ترچھے قطعاتِ خط سے ظاہر کیا گیا خطہ، کبیرہ قطعہ دائرہ ہے۔

دائِرے کے دو رداسی قطعات اور اُن کے متعلقہ قوس سے گِھرا ہوا علاقہ دائرے کا **سیکٹر** کہلاتا ہے۔

دائِرے کے رداسوں کا ایک جوڑا اِس دائرہ کو دو سیکٹروں میں تقسیم کرتا ہے شکل (iii) میں $OAIB$ دائِرے کا

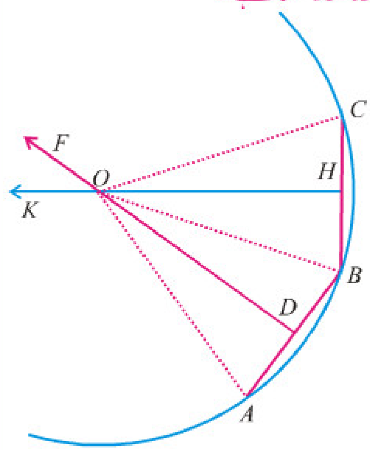
صغیرہ سیکٹر اور $OAJB$ کبیرہ سیکٹر ہو گا۔ دائرے کی قوس AB اس کے مرکز O پر جو زاویہ AOB بناتی ہے۔ اس کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔



شکل (iii)

مسئلہ 1

9.1(i) تین غیر خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔



معلوم: مستوی میں تین غیر ہم خط نقاط B، A اور C ہیں۔

مطلوب: تین غیر ہم خط نقاط B، A اور C میں سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔

عمل: نقطہ A کو B سے اور نقطہ B کو C سے ملایا۔ $\overline{AB}$ پر عمودی ناصف $\overrightarrow{DF}$ اور $\overline{BC}$ پر عمودی ناصف $\overrightarrow{HK}$ بنائیں۔ اِس طرح $\overrightarrow{DF}$ اور $\overrightarrow{HK}$ دو غیر متوازی قطعات خط ہیں اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ نیز نقاط B، A اور C کو نقطہ O سے ملائیں۔

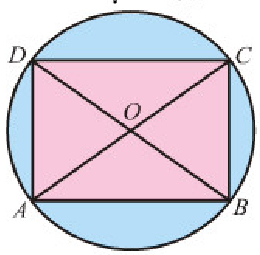
ثبوت:

بیانات	دلائل
عمودی ناصف $\overrightarrow{DF}$ پر ہر نقطہ A اور B سے یکساں فاصلے پر واقع ہے۔ خصوصاً (i) $m\overline{OA} = m\overline{OB}$ اِسی طرح عمودی ناصف $\overrightarrow{HK}$ پر ہر نقطہ B اور C سے یکساں فاصلے پر وَاقع ہے۔	$\overrightarrow{DF}$، $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔ (عمل) $\overrightarrow{HK}$، $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔

خصوصاً (ii) $m\overline{OB} = m\overline{OC}$ اب $\overrightarrow{DF}$ اور $\overrightarrow{HK}$ کا صرف ایک ہی مشترک نقطہ O ہے۔ جو نقاط B،A اور C سے یکساں فاصلے پر واقع ہے۔ یعنی $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC}$ البتہ O کے علاوہ کوئی ایسا دوسرا نقطہ نہیں۔ اس لیے مرکز O اور رداس $\overline{OA}$ والا دائرہ نقاط B،A اور C میں سے گزرتا ہے۔	(i) اور (ii) کی رو سے

پس دیے ہوئے تین نقاط B،A اور C میں سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔

مثال: ثابت کریں کہ ایک مستطیل کے راسی نقاط میں سے گزرتا ہوا صرف ایک ہی دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔



معلوم: $ABCD$ ایک مستطیل ہے۔

مطلوب: مستطیل $ABCD$ کے راسی نقاط میں سے گزرتا ہوا صرف ایک ہی دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔

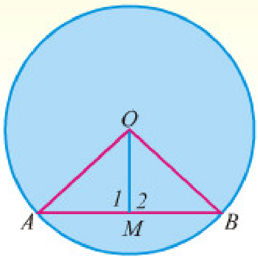
عمل: مستطیل $ABCD$ کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملتے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$ABCD$ ایک مستطیل ہے۔	معلوم
(i) $m\overline{AC} = m\overline{BD}$	مستطیل کے وتر برابر ہوتے ہیں
$\because$ $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملتے ہیں۔	عمل
(ii) $m\,OA = mOC$ اور $mOB = mOD$	مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں
$\Rightarrow$ (iii) $mOA = mOB = mOC = mOD$	(i) اور (ii) کی رو سے
یعنی نقطہ O، مستطیل کے تمام راسوں سے مساوی فاصلے پر واقع ہے۔ O کو مرکز مان کر بنایا جانے والا دائرہ مستطیل کے راسوں سے گزرتا ہے جبکہ $m\overline{OA}$، $m\overline{OB}$، $m\overline{OC}$ اور $m\overline{OD}$ دائرے کے رداس ہیں۔	

مسئلہ 2

9.1 (ii) دائرے کے مرکز سے کسی وَتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے والا قطعہ خط، وَتر پر عمود ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ M وتر $\overline{AB}$ کا نُقطہ تنصیف ہے۔ جبکہ وتر $\overline{AB}$ دائرہ کا قطر نہیں ہے۔

مطلوب: وَتر $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

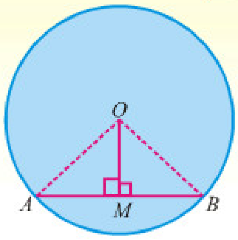
عمل: نقاط A اور B کو مرکز O سے ملائیں۔ $\angle 1$ اور $\angle 2$ لکھیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
میں $\Delta OAM \leftrightarrow \Delta OBM$	
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\overline{AM} = m\overline{BM}$	معلوم
$m\overline{OM} = m\overline{OM}$	مشترک
$\therefore \quad \Delta OAM \cong \Delta OBM$	$S.S.S \cong S.S.S$
$\Rightarrow \quad m\angle 1 = m\angle 2 \quad$ (i)	
یعنی $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle AMB = 180^\circ \quad$ (ii)	متصلہ سپلیمنٹری زاویے
$\therefore \quad m\angle 1 = m\angle 2 = 90^\circ$	(i) اور (ii) کی رو سے
یعنی وتر $\overline{OM} \perp \overline{AB}$	

مسئلہ 3

9.1 (iii) دائرے کے مرکز سے کسی وَتر پر عمود، اُس کی تنصیف کرتا ہے۔



معلوم: مرکز O وَالے دائرے کا وَتر $\overline{AB}$ ہے۔ اِس طرح کہ وتر $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

مطلوب: نقطہ M، وتر $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ ہے۔ یعنی $m\overline{AM} = m\overline{BM}$

عمل: نقاط A اور B کو مرکز O سے ملائیں۔

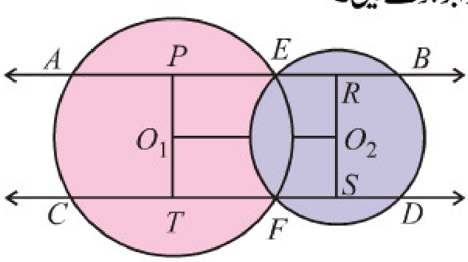
ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAM \leftrightarrow \Delta OBM$ میں	
$m\angle OMA = m\angle OMB = 90^{\circ}$	معلوم
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\overline{OM} = m\overline{OM}$	مشترک
$\therefore \quad \Delta OAM \cong \Delta OBM$	قائمۃ لزاویہ مثلثان میں H.S ≅ H.S
پس $m\overline{AM} = m\overline{BM}$	
$\overline{OM}$، وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔	

نتیجہ صریح 1 : کسی دائرے کے وتر کا عمودی ناصف دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔

نتیجہ صریح 2 : کسی دائرے کا قطر اُس کے دو متوازی وتروں کے وسطی نقاط میں سے گزرتا ہے۔

مثال: دو دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط کے متوازی خطوط جو دائروں کے متقاطع نقاط میں سے گزرتے ہوں۔ ان کے وہ حصے جو دائرے قطع کرتے ہیں لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: O_1 اور O_2 مراکز والے دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط E اور F پر قطع کرتے ہیں۔ نیز قطع شدہ قطعات خط $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$، $\overline{O_1O_2}$ کے متوازی ہیں۔

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ پر بالترتیب $\overline{PT}$ اور $\overline{RS}$ عمود کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$PRST$ ایک مستطیل ہے۔	عمل
$\therefore \quad m\,\overline{PR} = m\,\overline{TS} \quad$ (i)	
اب $\quad m\,\overline{PR} = m\,\overline{PE} + m\,\overline{ER}$ $= \frac{1}{2} m\,\overline{AE} + \frac{1}{2} m\,\overline{EB}$ $= \frac{1}{2}(m\,\overline{AE} + m\,\overline{EB})$	مسئلہ 3 کی رو سے
$m\,\overline{PR} = \frac{1}{2}(m\,\overline{AB}) \quad$ (ii)	$m\overline{AE} + m\overline{EB} = m\overline{AB}$
اسی طرح $\quad m\,\overline{TS} = \frac{1}{2} m\overline{CD} \quad$ (iii)	
$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m\overline{AB} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	(i)،(ii)اور(iii) کی رو سے
یعنی، $\quad m\overline{AB} = m\overline{CD}$	

مشق 9.1

1- ثابت کریں کہ دائرے کے قطر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

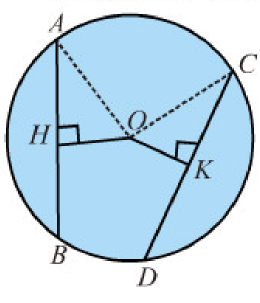
2- ثابت کریں کہ دائرے کے دو متقاطع وتر جو مرکز سے نہ گزرتے ہوں وہ ایک دوسرے کی تنصیف نہیں کرتے۔

3- اگر $\overline{AB}$ وتر کی لمبائی 8 سم ہو اور اس کا مرکز سے فاصلہ 3 سم ہو تو اس دائرہ کا قطر معلوم کریں۔

4- ایک دائرہ جس کا رداس 9 سم ہے اور اس کے وتر کا فاصلہ مرکز سے 5 سم ہو تو وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

مسئلہ 4

9.1 (iv) اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں گے۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ اِسکے دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ برابر ہیں۔ اِس طرح $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OK} \perp \overline{CD}$

مطلوب: $m\overline{OH} = m\overline{OK}$

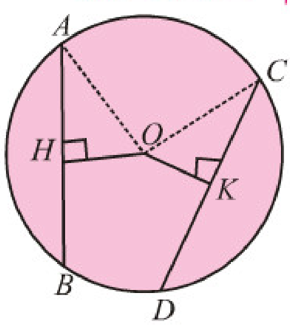
عمل: نقطہ O کو A سے اور O کو C سے ملائیں۔ اس طرح OAH اور OCK دو قائمۃ الزاویہ مثلثان ہیں۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
مسئلہ 3 کی رو سے $\overline{OH} \perp \overline{AB}$	$\overline{OH}$، وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔
	یعنی (i) $m\overline{AH} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$
مسئلہ 3 کی رو سے $\overline{OK} \perp \overline{CD}$	اسی طرح $\overline{OK}$، وتر $\overline{CD}$ کی تنصیف کرتا ہے۔
	یعنی (ii) $m\overline{CK} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$
معلوم	لیکن (iii) $m\overline{AB} = m\overline{CD}$
(i) اور (ii), (iii) کی رو سے	اس لیے (iv) $m\overline{AH} = m\overline{CK}$
$\overline{OH} \perp \overline{AB}$ and $\overline{OK} \perp \overline{CD}$ (معلوم)	اب قائمۃ الزاویہ مثلثان کی مطابقت
	$\Delta OAH \leftrightarrow \Delta OCK$
ایک ہی دائرے کے رداس	$m\overline{OA} = m\overline{OC}$
(iv) کی رو سے ثابت شدہ	$m\overline{AH} = m\overline{CK}$
H. S کے اصول کا موضوعہ	$\therefore \quad \Delta OAH \cong \Delta OCK$
	$\Rightarrow \quad m\overline{OH} = m\overline{OK}$

مسئلہ 5

(v) 9.1 دائرے کے دو وتر جو مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں باہم متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O اور دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہیں۔

جب کہ $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{OK} \perp \overline{CD}$

تو $m\overline{OH} = m\overline{OK}$

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

عمل: نقاط A اور C کو نقطہ O سے ملائیں اِس طرح دو قائمۃ الزاویہ مثلثان OAH اور OCK بن گئی ہیں۔

ثبوت:

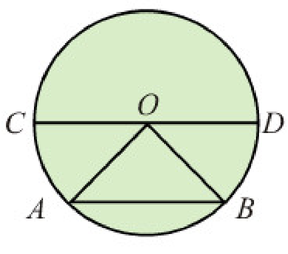
بیانات	دلائل
قائمۃ الزاویہ مثلثان $OAH \leftrightarrow OCK$ میں	
$\because \quad m\overline{OA} = m\overline{OC}$	ایک ہی دائرے کے رداس
$m\overline{OH} = m\overline{OK}$	معلوم
$\therefore \quad \Delta OAH \cong \Delta OCK$	H.S کے اصول کا موضوعہ
پس $\quad m\overline{AH} = m\overline{CK} \quad$ (i)	
لیکن $\quad m\overline{AH} = \frac{1}{2} m\overline{AB} \quad$ (ii)	$\overline{OH} \perp \overline{AB}$ وتر (معلوم)
اسی طرح $\quad m\overline{CK} = \frac{1}{2} m\overline{CD} \quad$ (iii)	$\overline{OK} \perp \overline{CD}$ وتر (معلوم)
نیز $\quad m\overline{AH} = m\overline{CK}$	(i) میں ثابت شدہ
لہٰذا $\quad \frac{1}{2} m\, \overline{AB} = \frac{1}{2} m\, \overline{CD}$	(ii) اور (iii) کی رو سے
یا $\quad m\, \overline{AB} = m\, \overline{CD}$	

مثال: ثابت کریں کہ دائرہ میں سب سے لمبا وتر ایک قطر ہی ہوتا ہے۔

معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ $\overline{AB}$ وتر اور $\overline{CD}$ قطر ہے۔

مطلوب: اگر وتر AB اور قطر $\overline{CD}$ دونوں مختلف ہوں تو $m\overline{CD} > m\overline{AB}$

عمل: نقطہ O کو A اور B سے ملانے سے ΔOAB بنتی ہے۔



ثبوت:

ΔOAB کے دو اضلاع کا مجموعہ اِسکے تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔ — مثلث کا اصولِ موضوعہ

(i) $\quad m\overline{OA} + m\overline{OB} > m\overline{AB} \quad \Rightarrow$ (جبکہ $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ ایک ہی دائرہ کے رداس ہیں۔)

(ii) $\quad m\overline{OA} + m\overline{OB} = m\overline{CD}$ نیز $\overline{CD}$ دائرے کا قطر ہے۔ (معلوم)

$m\overline{CD} > m\overline{AB} \quad \Rightarrow$ (i) اور (ii) کی رو سے

یعنی $\quad m\overline{CD} > m\overline{AB}$

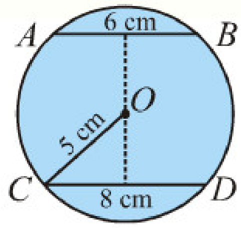
پس قطر سب سے لمبا وتر ہوتا ہے۔

مشق 9.2

1- ایک دائرے کے دو مساوی وتر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کریں کہ ایک وتر کے قطعات کی لمبائیاں، دوسرے وتر کے متعلقہ قطعات کی لمبائیوں کے برابر ہوتی ہیں۔

2- ایک دائرے کا قطر $\overline{CD}$، اسکے وتر $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔ ثابت کریں۔ کہ $m\overline{AC} = m\overline{BC}$

3- دی ہوئی شکل کے مطابق ایک دائرے کے دو متوازی وتروں $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔



متفرق مشق 9

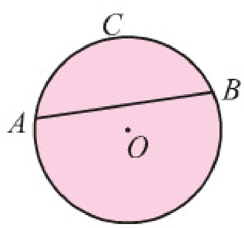
کثیر الانتخابی سوالات

1- درج ذیل سوالات کے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) دائروی شکل میں ADB کہلاتا/ کہلاتی ہے۔

(a) ایک قوس　(b) ایک قاطع خط

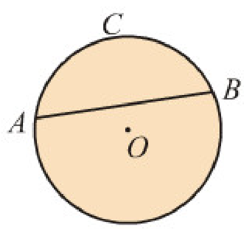
(c) ایک وتر　(d) ایک قطر



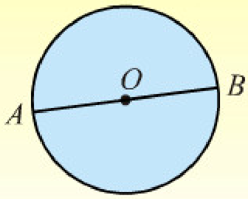
(ii) دائروی شکل میں ACB کہلاتا / کہلاتی ہے۔

(a) ایک قوس　(b) ایک قاطع خط

(c) ایک وتر　(d) ایک قطر



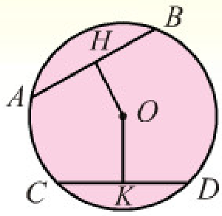
(iii) دائروی شکل میں AOB کہلاتا/ کہلاتی ہے۔



(a) ایک قوس (b) ایک قاطع خط

(c) ایک وتر (d) ایک قطر

(iv) دائروی شکل میں دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ مرکز سے یکساں فاصلے پر واقع ہیں وہ آپس میں ہونگے۔



(a) متوازی (b) غیر متماثل

(c) متماثل (d) عمود

(v) ایک ہی دائرے کے رداس ہیں۔

(a) تمام برابر (b) قطر سے دوگنا

(c) تمام غیر برابر (d) کسی بھی وَتر سے آدھے

(vi) دائرے کے مرکز سے گزرنے وَالا وتر کہلاتا ہے۔

(a) رداس (b) قطر (c) قطعہ خط (d) محیط

(vii) دائرے کے وتر کے عمودی ناصف ہمیشہ گزرتے ہیں ______ سے

(a) رداس (b) محیط (c) مرکز (d) قطر

(viii) دائرے کا وہ رقبہ جو دو رداسوں اور اُن کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا ہو کہلاتا ہے۔

(a) دائرے کا محیط (b) دائرے کا سیکٹر

(c) دائرے کا قطر (d) قطعہ دائرہ

(ix) دائرے کے کسی نقطے کا اس کے مرکز تک کا فاصلہ کہلاتا ہے۔

(a) رداس (b) قُطر (c) ایک وتر (d) ایک قوس

(x) دائرے کے کسی نقطہ سے مرکز کو ملانے والا ______ کہلاتا ہے۔

(a) محیط (b) قُطر (c) رداسی قطعہ (d) احاطہ

(xi) مستوی کے تمام نقاط کا سیٹ جو معین نقطہ سے برابر فاصلے پر ہوں ______ کہلاتا ہے۔

(a) رداس (b) دائرہ (c) محیط (d) قطر

(xii) مثلث کو ظاہر کرنے کے لیے علامت ہے۔

(a) $\angle$ (b) Δ (c) $\perp$ (d) $\odot$

(xiii) مکمل دائرے کو تقسیم کیا جاتا ہے۔ __________

(a) 90^o (b) 180^o (c) 270^o (d) 360^o

(xiv) دائرہ کتنے غیر خطی نقاط سے گزرتا ہے؟ __________

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) ان میں سے کوئی نہیں

-2 درج ذیل اصطلاحات میں فرق بیان کریں۔ اور اِن کی بذریعہ اشکال وضاحت کریں۔

(i) ایک دائرہ اور اس کا محیط۔
(ii) ایک دائرے کا وتر اور اِس کا قطر۔
(iii) ایک دائرے کا وتر اور اِسکی قوس۔
(iv) ایک دائرہ میں صغیرہ قوس اور کبیرہ قوس۔
(v) ایک دائرے کا اندرونہ اور بیرونہ۔
(vi) ایک دائرے کا سیکٹر اور قطعہ۔

خلاصہ

- دائرے کا رداس r ہو تو اِسکا محیط $2\pi r$ ہوتا ہے۔
- دائرے کا رداس r ہو تو اِسکا رقبہ πr^2 ہوتا ہے۔
- تین یا تین سے زیادہ نقاط ایک ہی خطِ مستقیم پر وَاقع ہوں تو انہیں ہم خط نقاط کہتے ہیں بصورت دیگر وہ غیر ہم خط نقاط ہوں گے۔
- مثلث کے راسوں سے گزرنے والا دائرہ محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔ جبکہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف اِس کے مرکز کی نشاندہی کرتے ہیں۔
- تین غیر خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزر سکتا ہے۔
- دائرے کے مرکز سے کسی وَتر (جو قطر نہ ہو) کی تنصیف کرنے وَالا قطعہ خطِ، وَتر پر عمود ہوتا ہے۔
- دائِرے کے مرکز سے کسی وَتر پر عمود، اس کی تنصیف کرتا ہے۔
- اگر دائرے کے دو وتر متماثل ہوں تو وہ مرکز سے مساوی الفاصلہ ہوں گے۔
- دائِرے کے دو وَتر جو مرکز سے برابر فاصلہ پر ہوں، وہ متماثل ہوتے ہیں۔

یونٹ 10

دائرے پر مماس
(TANGENT TO A CIRCLE)

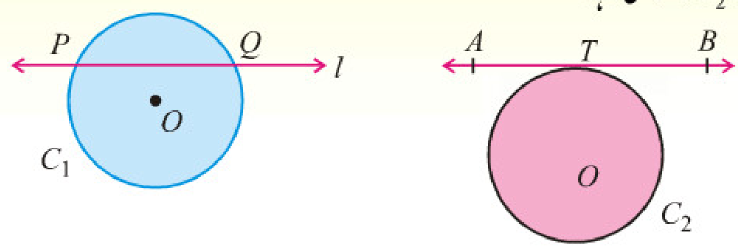
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- اگر دائرے کا رداسی قطعہ خط اس کو کسی نقطہ پر ملے اور اس نقطہ پر عمود کھینچا جائے تو وہ عمود دائرے کا مماس ہوتا ہے۔
- دائرے کا مماس اور رداسی قطعہ خط جو نقطہ تماس اور مرکز کو ملائے، ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
- کسی بیرونی نقطہ سے دائرے کے دونوں مماس لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی یا اندرونی طور پر مس کریں تو ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ بالترتیب ان کے رداسوں کے مجموعے یا فرق کے برابر ہوتا ہے۔

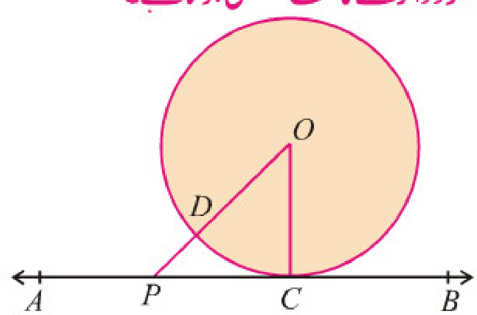
قاطع خط: ایک ایسا خط مستقیم ہے جو دائرے کے محیط کو دو واضح نقاط پر قطع کرے۔ شکل میں دائرہ C_1 کا قاطع خط "l" ہے۔

دائرے کا مماس: ایک ایسا خطِ مستقیم ہے جو دائرے کے محیط کو صرف ایک نقطہ پر مس کرے۔ شکل میں خط $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے C_2 کا مماس ہے۔



مسئلہ 1

10.1(i) اگر دائرے کا رداسی قطعہ خط اس کو کسی نقطہ پر ملے اور اس نقطہ پر عمود کھینچا جائے تو وہ عمود دائرے کا مماس ہوتا ہے۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O اور رداس $\overline{OC}$ ہے۔ خط $\overleftrightarrow{AB}$، رداسی قطعہ خط OC کے نقطہ C پر عمود ہے۔

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB}$، دائرے کے نقطہ C پر مماس ہے۔

عمل: $\overleftrightarrow{AB}$ پر نقطہ C کے علاوہ کوئی دوسرا نقطہ P لیں۔ نقطہ O کو P سے ملائیں۔

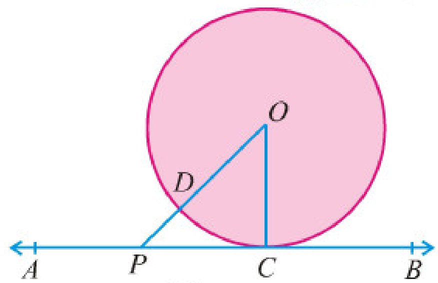
ثبوت:

بیانات	دلائل
ΔOCP میں	
$m\angle OCP = 90^\circ$	$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OC}$ (معلوم)
اور $m\angle OPC < 90^\circ$	قائمۃ الزاویہ مثلث میں ایک حادہ زاویہ

$m\overline{OP} > m\overline{OC}$ نقطہ P دائرے کے باہر واقع ہے اس لیے $\overleftrightarrow{AB}$ کا ہر نقطہ، C کے علاوہ دائرے پر نہیں ہوتا۔ پس $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے کو صرف ایک نقطہ C پر مس کرتا ہے۔ یعنی $\overleftrightarrow{AB}$، دائرے کے نقطہ C پر مماس ہے۔	مثلث میں بڑے زاویے کے سامنے بڑا ضلع

مسئلہ 2

10.1(ii) دائرے کا مماس اور رداسی قطعہ خط جو نقطہ تماس اور مرکز کو ملائے، ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O اور رداس $\overline{OC}$ ہے۔ نیز $\overleftrightarrow{AB}$، دائرے کے نقطہ C پر مماس ہے۔

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overline{OC}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

عمل: خط مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر نقطہ C کے علاوہ ایک دوسرا نقطہ P لیں۔ نقطہ O کو P سے ملائیں۔ $\overline{OP}$ دائرے کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔

ثبوت:

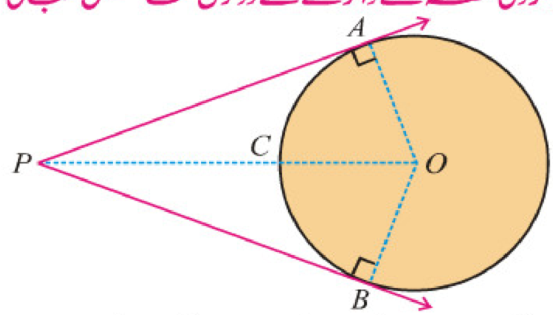
بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{AB}$ دائرے کے نقطہ C پر مماس ہے۔	معلوم
جبکہ $\overline{OP}$ دائرے کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے	عمل
$m\overline{OC} = m\overline{OD}$ (i)	ایک ہی دائرے کے رداس
لیکن $m\overline{OD} < m\ \overline{OP}$ (ii)	نقطہ P دائرے کے باہر واقع ہے

کیونکہ $m\overline{OC} < m\overline{OP}$	(i) اور (ii) کی رو سے
اِس طرح رداس $\overline{OC}$ اُن تمام قطعات خط سے چھوٹا ہے جو نقطہ O سے $\overleftrightarrow{AB}$ تک کھینچے گئے ہیں۔	
پس رداس $\overline{OC}$، مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے یعنی $\overline{OC} \perp \overleftrightarrow{AB}$	

نتیجہ صریح: دائرے کا مرکز O ہو تو اِس کے رداس $\overline{OC}$ کے انتہائی نقطہ C پر صرف ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے۔ ہم اس سے یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی دائرے کے محیطی نقطہ C پر ایک اور صرف ایک خطِ مماس کھینچا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3

(iii) 10.1 کسی بیرونی نقطہ سے دائرے کے دونوں مماس لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے اور اِسکے بیرونی نقطہ P سے $\overrightarrow{PA}$ اور $\overrightarrow{PB}$ دو مماس ہیں۔

مطلوب: $m\overline{PA} = m\overline{PB}$

عمل: نقطہ O کو A، B اور P سے ملائیں۔ اِس طرح دو قائمۃ الزاویہ مثلثان OAP اور OBP بنتی ہیں۔

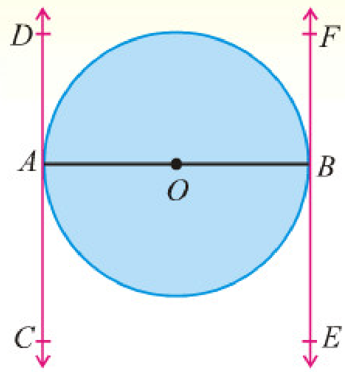
ثبوت:

بیانات	دلائل
مثلثان $OAP \leftrightarrow OBP$ میں	
$m\angle OAP = m\angle OBP = 90^{\circ}$	دائرے کے رداس، $\overrightarrow{PA}$ اور $\overrightarrow{PB}$ مماسوں پر عمود ہیں۔
$\overline{OP} \cong \overline{OP}$	مشترک وتر
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے مماس
اس لیے $\Delta OAP \cong \Delta OBP$	قائمۃ الزاویہ مثلثان میں وتر۔ ضلع کا موضوعہ
پس $m\overline{PA} = m\overline{PB}$	

نوٹ: مماس کی لمبائی کسی دائرے کے بیرونی نقطہ P سے نقطہ تماس تک ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح: اگر مرکز O والے دائرے کے بیرونی نقطہ P سے $\overrightarrow{PA}$ اور $\overrightarrow{PB}$ دو مماس کھینچیں جائیں تو $\overline{OP}$، وتر $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہوگا۔

مثال 1: دیے ہوئے دائرے کا مرکز O اور قطر $\overline{AB}$ ہے، نقاط A اور B پر مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کریں کہ دونوں مماس متوازی ہیں۔



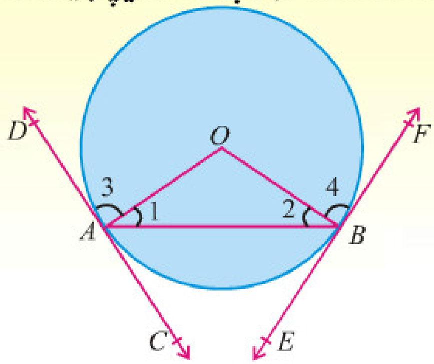
معلوم: دیے ہوئے دائرے کا مرکز O اور قطر $\overline{AB}$ ہے۔ خط CD دائرے کے نقطہ A پر مماس ہے اور خط EF دائرے کے B پر دوسرا مماس ہے۔

مطلوب: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

ثبوت:

بیانات			دلائل
ایک دائرے کا مرکز O اور قطر $\overline{AB}$ ہے			معلوم
$\therefore$		$\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ ایک ہی دائرے کے رداس ہیں۔	
نیز $\overleftrightarrow{CD}$ دائرے کے نقطہ A پر مماس ہے۔			معلوم
اس لیے	$\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{CD}$		مسئلہ 1 کی رو سے
(i)	$\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$	$\Rightarrow$	
اِسی طرح $\overleftrightarrow{EF}$ دائرے کے نقطہ B پر مماس ہے۔			معلوم
اس لیے	$\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{EF}$		مسئلہ 1 کی رو سے
(ii)	$\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{EF}$	$\Rightarrow$	
پس	$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$		(i) اور (ii) کی رو سے ($\overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$، $\overline{AB}$ پر عمود ہیں)

مثال 2: ثابت کریں کہ دائرے کے کسی وتر کے سروں پر جو مماس کھینچے جائیں وہ وتر کے ساتھ برابر زاویے بناتے ہیں۔



معلوم: ایک دائرے کا مرکز O ہے اور $\overline{AB}$ وتر ہے۔ $\overleftrightarrow{CAD}$، نقطہ A پر مماس ہے اور $\overleftrightarrow{EBF}$، نقطہ B پر مماس ہے۔

مطلوب: $m\angle BAD = m\angle ABF$

عمل: نقطہ O کو A اور B سے ملائیں۔ اِس طرح ΔOAB بنتی ہے نیز شکل کے مطابق $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ اور $\angle 4$ لکھیں۔

ثبوت:

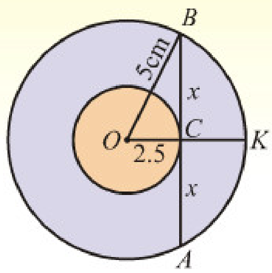
بیانات	دلائل
ΔOAB میں	عمل
$\because$ $m\,\overline{OA} = m\overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداس
اس لیے (i) $m\angle 1 = m\angle 2$	ΔOAB کے مساوی اضلاع کے مخالف زاویے
نیز $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{CD}$	رداس، خط مماس پر عمود ہے
اس لیے (ii) $m\angle 3 = m\angle OAD = 90^\circ$	
اسی طرح $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{EF}$	رداس، خط مماس پر عمود ہے
اس لیے (iii) $m\angle 4 = m\angle OBF = 90^\circ$	
پس (iv) $m\angle 3 = m\angle 4$	(ii) اور (iii) کی رو سے
$m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 4$	(i) اور (iv) کو جمع کرنے سے
یعنی $m\angle BAD = m\angle ABF$	

مشق 10.1

-1 ثابت کریں کہ ایک دیے ہوئے دائرے کے قطر کے سروں پر بنائے گئے مماس آپس میں متوازی ہونگے۔

-2 دو ہم مرکز دائروں کے قطر 10 سم اور 5 سم ہیں۔ بیرونی دائرے کے اس وتر کی لمبائی معلوم کریں جو اندرونی دائرے کو مس کرتا ہو۔

(اشارہ) بذریعہ شکل

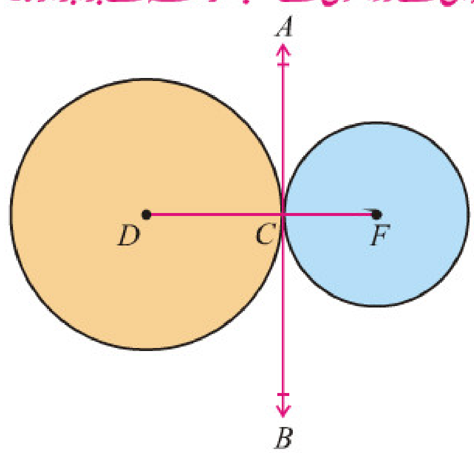


$$m\overline{AB} = 2x = 2\sqrt{25 - 6.25}$$
$$= 2\sqrt{18.75} \approx 8.7\text{cm}$$

-3 $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ دو دائروں کے مشترک مماس ہیں۔ اگر A اور C پہلے دائرے کے نقاط تماس ہوں جبکہ B اور D دوسرے دائرے کے نقاطِ تماس ہوں تو ثابت کریں کہ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

مسئلہ (A)4

(iv) 10.1 اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہوں تو ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔



معلوم: دو دائرے جن کے مراکز بالترتیب D اور F ہیں۔ یہ دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ C پر مس کرتے ہیں۔ اِس طرح اِن دائروں کے رداس بالترتیب $\overline{CD}$ اور $\overline{CF}$ ہیں۔

مطلوب: نقطہ C مراکز D اور F کو ملانے والے قطعہ خط پر واقع ہے اور $m\overline{DF} = m\overline{DC} + m\overline{CF}$

عمل: دو دائروں کے نقطہ تماس C پر ایک مشترک مماس $\overleftrightarrow{ACB}$ کھینچیں۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
	دونوں دائرے بیرونی طور پر نقطہ C پر مس کرتے ہیں جبکہ $\overline{CD}$ پہلے دائرے کا رداس ہے اور $\overleftrightarrow{ACB}$ مشترک مماس ہے۔
رداس $\overline{CD}$ مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے۔	اس لیے (i) $m\angle ACD = 90^\circ$
	اِسی طرح $\overline{CF}$ دوسرے دائرے کا رداس ہے اور $\overleftrightarrow{ACB}$ مشترک مماس ہے۔
رداس $\overline{CF}$ مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے۔	اس لیے (ii) $m\angle ACF = 90^\circ$
(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے	$m\angle ACD + m\angle ACF = 90^\circ + 90^\circ$
متصلہ سپلیمنٹری زاویوں کا مجموعہ	(iii) $m\angle DCF = 180^\circ$
	پس DCF ایک قطعہ خط ہے جس میں نقطہ C، نقاط D اور F کے درمیان واقع ہے۔
	اور $m\overline{DF} = m\overline{DC} + m\overline{CF}$

مشق 10.2

-1 ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ اِسکے دو مساوی وَتر ہیں۔ دونوں وَتروں کے وسطی نقاط بالترتیب H اور K ہیں۔ ثابت کریں $\overline{HK}$ دونوں وَتروں $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کے ساتھ یکساں زاویے بناتا ہے۔

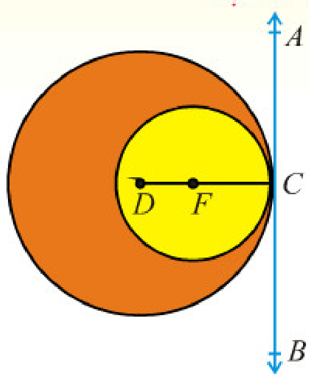
-2 ایک دائرے کا رداس 2.5 سم ہے۔ اِس کے دو وَتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ایک دوسرے سے 3.9 سم کے فاصلے پر واقع ہیں۔ اگر پہلے وتر $\overline{AB}$ کی لمبائی 1.4 سم ہو تو دوسرے وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

-3 دو قاطع دائرُوں کے رداس 10 سم اور 8 سم ہیں۔ اگر اِن کے مشترک وتر کی لمبائی 6 سم ہو تو اُن دائرُوں کے مراکز کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔

-4 ثابت کریں کہ کسی دائرے میں سب سے بڑا وتر اس دائرے کا قطر ہوتا ہے۔

مسئلہ 4(B)

(v) 10.1 اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر مس کریں تو ان کا نقطہ تماس ان کے مراکز کو ملانے والا قطعہ خط پر واقع ہوتا ہے اور ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ ان کے رداسوں کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: دو دائرے جن کے مراکز بالترتیب D اور F ہیں وہ ایک دوسرے کو اندرونی طور پر نقطہ C پر مس کرتے ہیں۔ اِس طرح اِن دائروں کے رداس بالترتیب $\overline{CD}$ اور $\overline{CF}$ ہیں۔

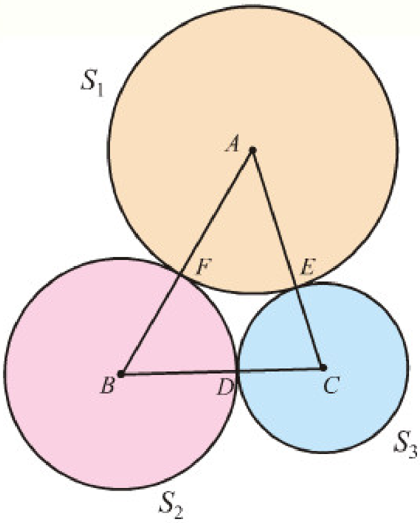
مطلوب: نقطہ C، مراکز D اور F کو ملانے والے خط پر واقع ہے اور $m\,\overline{DF} = m\overline{DC} - m\overline{CF}$

عمل: دونوں دائروں کے نقطہ تماس C پر ایک مشترک مماس $\overleftrightarrow{ACB}$ کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
دونوں دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر نقطہ C پر مس کرتے ہیں۔ جبکہ $\overleftrightarrow{ACB}$ مشترک مماس ہے اور $\overline{CD}$ پہلے دائرے کا رداس ہے۔	
اس لیے (i) $m\angle ACD = 90^\circ$	رداس $\overline{CD}$ مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے۔
اِسی طرح $\overleftrightarrow{ACB}$ مشترک مماس ہے اور $\overline{CF}$ دوسرے دائرے کا رداس ہے۔	
اس لیے (ii) $m\angle ACF = 90^\circ$	رداس $\overline{CF}$ مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے۔
$m\angle ACD = m\angle ACF = 90^\circ$	(i) اور (ii) کی رو سے

$\angle ACD$ اور $\angle ACF$ مقدار میں برابر ہیں اور نقطہ F، نقاط C اور D کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے $m\overline{DC} = m\overline{DF} + m\overline{FC}$ یعنی $m\overline{DC} - m\overline{FC} = m\overline{DF}$ یا $m\overline{DF} = m\overline{DC} - m\overline{FC}$	



مثال 1: تین دائروں میں ہر جوڑا آپس میں بیرونی طور پر مس کرتا ہے۔ ثابت کریں کہ مراکز کو ملانے سے بننے والی مثلث کا احاطہ اُن دائروں کے قطروں کے مجموعے کے برابر ہو گا۔

معلوم: s_1، s_2 اور s_3 دائروں کے بالترتیب مراکز نقاط A، B، C اور ان کے رداس r_1، r_2 اور r_3 ہیں۔ دائروں کا ہر جوڑا آپس میں بیرونی طور پر نقاط D، E اور F پر مس کرتا ہے۔ اِس طرح اِن دائروں کے مراکز کو ملانے سے مثلث ABC بنتی ہے۔

مطلوب: مثلث ABC کا احاطہ $= 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = d_1 + d_2 + d_3$

مثلث ABC کا احاطہ = دائروں کے قطروں کا مجموعہ

ثبوت:

بیانات	دلائل
تین دائروں کے مراکز بالترتیب A، B اور C ہیں۔ دائروں کا ہر جوڑا آپس میں بیرونی طور پر نقاط E, D اور F پر مَس کرتا ہے۔	معلوم
اس لیے $m\overline{AB} = m\overline{AF} + m\overline{FB}$ (i)	
$m\overline{BC} = m\overline{BD} + m\overline{DC}$ (ii)	
اور $m\overline{CA} = m\overline{CE} + m\overline{EA}$ (iii)	
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{CA} = m\overline{AF} + m\overline{FB} + m\overline{BD}$ $+ m\overline{DC} + m\overline{CE} + m\overline{EA}$	(i)، (ii) اور (iii) کو جمع کرنے سے

$= (m\overline{AF} + m\overline{EA}) + (m\overline{FB} + m\overline{BD})$ $+ (m\overline{CD} + m\overline{CE})$	
ΔABC کا احاطہ $= 2r_1 + 2r_2 + 2r_3$ $= d_1 + d_2 + d_2$ = دائروں کے قطروں کا مجموعہ	$d_1 = 2r_1$، $d_2 = 2r_2$ اور $d_3 = 2r_3$ دائرے کے قطر ہیں

مشق 10.3

-1 دو دائرے جن کے رداس 5 سم اور 4 سم ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مَس کرتے ہیں۔ تب 2.5 سم والا ایک دائرہ اِس طرح بنائیں جو پہلے جوڑے کو بھی بیرونی طور پر مَس کرے۔

-2 اگر دو دائروں کے مراکز کا فاصلہ، دائروں کے رداسوں کے مجموعہ یا ان کے فرق کے برابر ہو تو وہ دائرے ایک دوسرے کو مَس کرتے ہیں۔

متفرق مشق 10

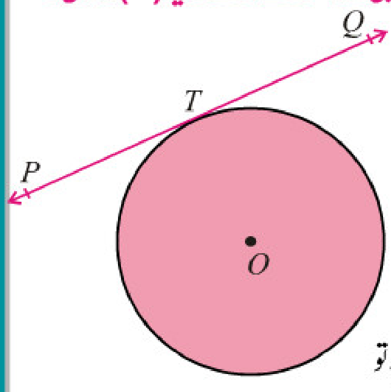
کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے ہوئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) متصلہ دائرے کی شکل میں $\overleftrightarrow{PTQ}$ کو کہا جاتا ہے۔

(a) ایک قوس　(b) ایک وتر

(c) ایک مماس　(d) ایک قاطع خط



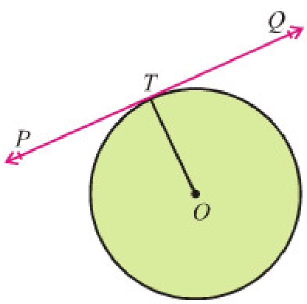
(ii) مرکز O والے دائرے میں $\overline{OT}$ رداس ہے اور $\overleftrightarrow{PTQ}$ ایک خطِ مماس ہے تو

(a) $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{PQ}$

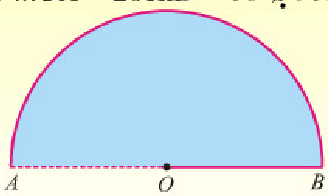
(b) $\overleftrightarrow{PQ} \not\perp \overline{OT}$

(c) $\overline{OT} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$

(d) $\overleftrightarrow{PQ}$ کا عمودی ناصف $\overline{OT}$ ہے



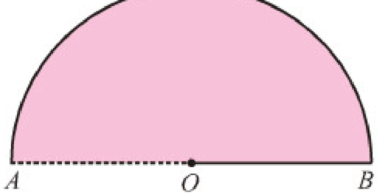
(iii) دی ہوئی شکل میں نصف دائرے کا رقبہ ہو گا۔ اگر $m\overline{OA} = 20\text{cm}$ اور $\pi \simeq 3.1416$



(a) 62.83 مربع سم (b) 314.16 مربع سم

(c) 436.20 مربع سم (d) 628.32 مربع سم

(iv) دی ہوئی شکل میں نصف دائرے کا احاطہ ہو گا۔ اگر $m\overline{OA} =$ 20 سم اور $\pi \simeq 3.1416$



(a) 31.42 سم (b) 62.832 سم (c) 125.65 سم (d) 188.50 سم

(v) ایک خط جس کے دائرے کے ساتھ دو نقاط مشترک ہوں، کہتے ہیں۔

(a) دائرے کا Sine (b) دائرے کا Cosine

(c) دائرے کا Tangent (d) دائرے کا Secant

(vi) ایک خط جس کا دائرے کے ساتھ صرف ایک نقطہ مشترک ہو، کہتے ہیں۔

(a) دائرے کا Sine (b) دائرے کا Cosine

(c) دائرے کا Tangent (d) دائرے کا Secant

(vii) ایک دائرے کے بیرونی نقطہ سے دو کھینچے گئے مماس لمبائی کے لحاظ سے ۔۔۔۔۔۔۔ ہوتے ہیں۔

(a) نصف (b) برابر (c) دوگنا (d) تین گنا

(viii) ایک دائرے کا صرف ایک ہی ۔۔۔۔۔۔۔ ہوتا ہے۔

(a) خطِ قاطع (b) وَتر (c) قطر (d) مرکز

(ix) ایک خطِ مماس دائرے کو ۔۔۔۔۔۔۔ کاٹتا ہے۔

(a) تین نقاط پر (b) دو نقاط پر (c) ایک نقطہ پر (d) کسی نقطہ پر بھی نہیں

(x) دائرے کے قطر کے سروں پر کھینچے گئے مماس آپس میں ۔۔۔۔۔۔۔ ہوتے ہیں۔

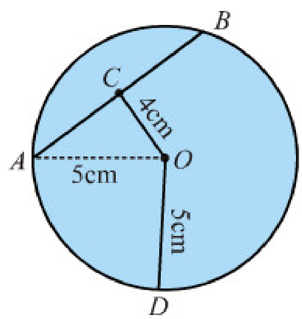
(a) متوازی (b) غیر متوازی (c) ہم خط (d) عمود

(xi) دو بیرونی طور پر مَس کرنے والے مساوی دائروں کے مراکز کا فاصلہ ہوتا ہے۔

(a) صفر لمبائی (b) دائرے کا رداس

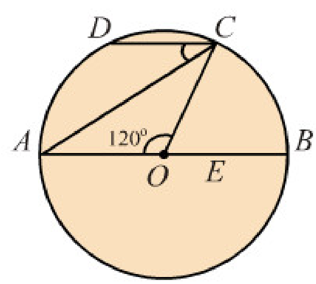
(c) دائرے کا قطر (d) دائرے کے قطر کا دوگنا

(xii) دیے ہوئے دائرے کی شکل میں مرکز O اور رداس 5 سم ہے۔ اگر ایک وتر مرکز سے 4 سم کے فاصلے پر ہو تو وتر کی لمبائی ہوگی۔



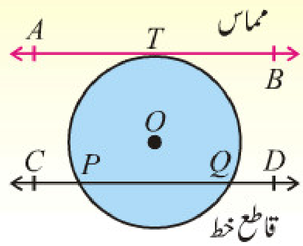
(a) 4 سم (b) 6 سم (c) 7 سم (d) 9 سم

(xiii) دیے ہوئے دائرے کی شکل میں مرکز O اور قطر $\overline{AB}$ ہے۔ اگر $m\angle AOC = 120^\circ$ اور $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ تو $m\angle ACD$ کے برابر ہوتا ہے۔



(a) 40° (b) 30° (c) 50° (d) 60°

خلاصہ



- قاطع خط ایک ایسا خط مستقیم ہے جو دائرے کے محیط کو دو واضح نقاط پر قطع کرے۔ شکل میں قاطع $\overleftrightarrow{CD}$ دائرہ کو دو واضح نقاط P اور Q قطع کرتا ہے۔
- دائرے کا مماس ایک ایسا خط ہے۔ جو دائرے کے محیط کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہے۔ شکل میں دائرے کے نقطہ T پر $\overleftrightarrow{AB}$ مماس ہے۔
- مماس کی لمبائی دائرے کے کسی بیرونی نقطہ سے نقطہ تماس تک ہوتی ہے۔
- اگر دائرے کے کسی نقطہ میں سے گزرنے والے رداسی قطعہ خط پر اُسی نقطہ سے عمود کھینچا جائے تو وہ عمود دائرے کا مماس ہوتا ہے۔
- دائرے کا مماس اور رداسی قطعہ خط جو نقطہ تماس اور مرکز کو ملائے ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
- کسی بیرونی نقطہ سے دائرے پر کھینچے گئے دونوں مماس لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی یا اندرونی طور پر مس کریں تو ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ بالترتیب ان کے رداسوں کے مجموعے یا فرق کے برابر ہوتا ہے۔

یونٹ 11

وَتر اور قوسیں

(CHORDS AND ARCS)

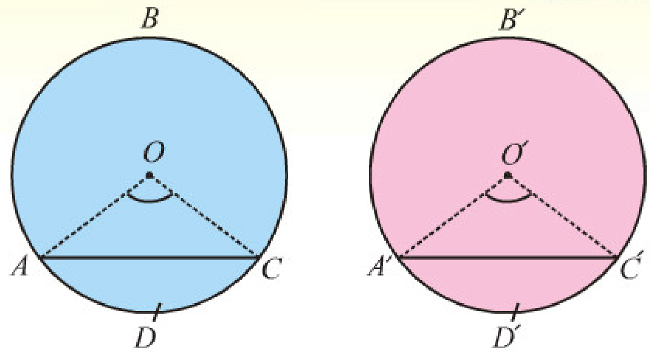
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں متماثل ہوں تو ان کے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو وہ دو متماثل قوسیں قطع کرتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو ان سے بننے والے مرکزی زاویے بھی مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوں تو ان زاویوں کو بنانے والے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

مسئلہ 1

دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں متماثل ہوں تو اُن کے وَتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: $ABCD$ اور $A'B'C'D'$ دو متماثل دائرے ہیں۔ جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں
اور $\widehat{ADC} \cong \widehat{A'D'C'}$ یعنی $m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$

مطلوب: $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

عمل: O کو A اور C سے، O' کو A' اور C' سے ملائیں۔

ثبوت:

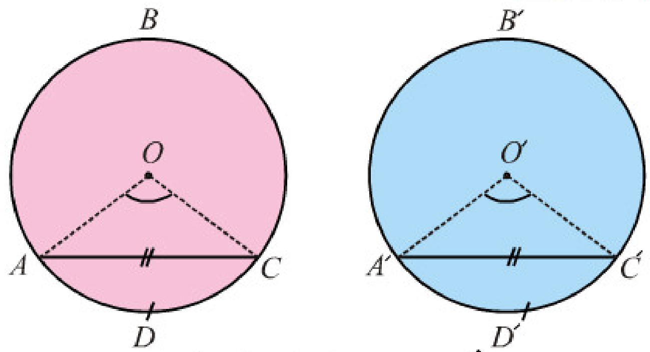
بیانات	دلائل
$ABCD$ اور $A'B'C'D'$ دو متماثل دائرے ہیں جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں۔	معلوم
$m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$	معلوم
اسلیے $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$	متماثل دائروں میں متماثل یا لمبائی میں برابر قوسوں کے مرکزی زاویے
اب مثلثان AOC اور $A'O'C$ کی مطابقت میں	
$m\overline{OA} = m\overline{O'A'}$	متماثل دائروں کے رداس
$m\angle AOC = m\angle A'O'C'$	ثابت شدہ
$m\overline{OC} = m\overline{O'C'}$	متماثل دائروں کے رداس
$\therefore$ $\Delta AOC \cong \Delta A'O'C'$	S.A.S ≅ S.A.S

اور $m\overline{AC} = m\,\overline{A'C'}$ اِسی طرح یہ مسئلہ ایک ہی دائرے میں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔	

مسئلہ 2

(عکس مسئلہ 1)

دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وَتر لمبائی میں برابر ہوں تو وہ دو متماثل قوسیں قطع کرتے ہیں۔



معلوم: $ABCD$ اور $A'B'C'D'$ دو متماثل دائرے ہیں جن کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں

اور $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

مطلوب: $\widehat{ADC} \cong \widehat{A'D'C'}$ یا $m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$

عمل: O کو A اور C سے، O' کو A' اور C' سے ملائیں۔

ثبوت:

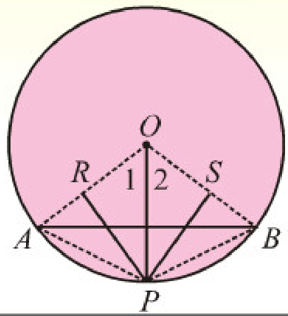
بیانات	دلائل
ΔAOC اور $\Delta A'O'C'$ کی مطابقت میں	
$m\overline{OA} = m\overline{O'A'}$	متماثل دائروں کے رداس
$m\overline{OC} = m\overline{O'C'}$	متماثل دائروں کے رداس
$m\,\overline{AC} = m\,\overline{A'C'}$	معلوم
$\therefore$ $\Delta AOC \cong \Delta\, A'O'C'$	S.S.S ≅ S.S.S
اور $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$	
پَس $m\widehat{ADC} = m\widehat{A'D'C'}$	مقدار میں برابر مرکزی زاویوں کے سامنے قوسیں

مثال 1: ایک دائرے کا مرکز O ہے اور $\overline{AB}$ اس کا وتر ہے۔ دائرے پر موجود ایک نقطہ P اِس کے رداسوں $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے یکساں فاصلے پر ہے۔ ثابت کریں کہ $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

معلوم: مرکز O والے دائرے کا وتر $\overline{AB}$ ہے۔ دائرے پر موجود ایک نقطہ P اِسکے رداسوں $\overline{OA}$ اور $\overline{OB}$ سے یکساں فاصلے پر ہے یعنی $m\overline{PR} = m\overline{PS}$

مطلوب: $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

عمل: نقطہ O کو P سے ملائیں۔ دی ہوئی شکل کے مطابق $\angle 1$ اور $\angle 2$ بنائیں۔

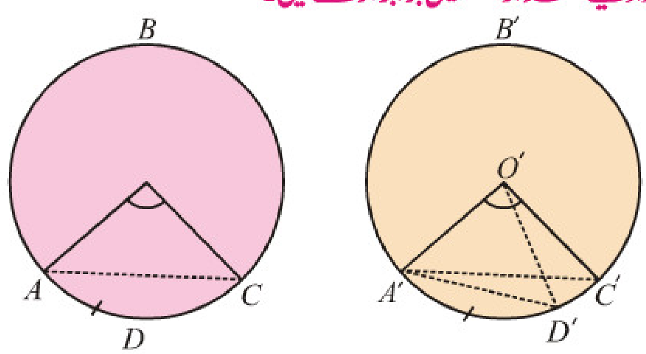


ثبوت:

بیانات		دلائل
	قائمۃ الزاویہ مثلثان OPR اور OPS میں	
	$m\,\overline{OP} = m\,\overline{OP}$	مشترک
	$m\,\overline{PR} = m\,\overline{PS}$	معلوم
$\therefore$	$\Delta OPR \cong \Delta\, OPS$	قائمۃ الزاویہ مثلثان میں $H.S \cong H.S$
اور	$m\angle 1 = m\angle 2$	دائرے کے مرکزی زاویے
پس	$m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$	مقدار میں برابر مرکزی زاویوں کے سامنے قوسیں

مسئلہ 3

دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وَتر لمبائی میں برابر ہوں تو اُن سے بننے والے مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: دو متماثل دائروں ABC اور $A'B'C'$ کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں

اور $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ یا $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

مطلوب: $\angle AOC \cong \angle A'O'C'$

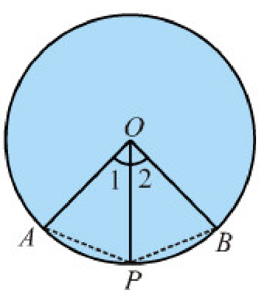
عمل: فرض کریں کہ اگر $m\angle AOC \neq m\angle A'O'C'$ ہو تو $\angle AOC \cong \angle A'O'D'$۔ D' کو A' اور O' سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\angle AOC \cong \angle A'O'D'$	عمل
اس لیے (i) $\widehat{AC} \cong \widehat{A'D'}$	متماثل دائروں میں متماثل مرکزی زاویوں کی قوسیں
(ii) $\overline{AC} \cong \overline{A'D'}$ یا $m\overline{AC} = m\overline{A'D'}$	مسئلہ 1 کی رو سے
لیکن (iii) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ یا $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$	معلوم
$\therefore$ $m\overline{A'C'} = m\overline{A'D'}$	(ii) اور (iii) کی رو سے
جو صرف تبھی ممکن ہے جب C' اور D' منطبق ہو جائیں۔	
پس (iv) $m\angle A'O'C' = m\angle A'O'D'$	
لیکن (v) $m\angle AOC = m\angle A'O'D'$	عمل
$m\angle AOC = m\angle A'O'C'$	(iv) اور (v) کی رو سے

نتیجہ صریح 1 : دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو مرکزی زاویے مقداروں میں برابر ہوں قطاع (Sectors) دائرے بھی برابر ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 2 : دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو قوسیں لمبائیوں میں غیر برابر ہوں تو اِن سے بننے والے مرکزی زاویے بھی مقداروں میں غیر برابر ہوتے ہیں۔



مثال 1: کسی دائرے میں مرکزی زاویے کا اندرونی ناصف مرکزی زاویے سے بننے والی قوس کی تنصیف کرتا ہے۔

معلوم: O مرکز والے دائرے میں $\overline{OP}$ مرکزی زاویہ AOB کا اندرونی ناصف ہے۔

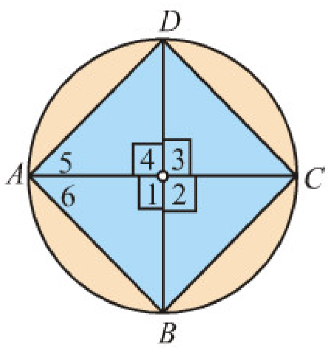
مطلوب: $\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$ یا $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

عمل: $\overline{AP}$ اور $\overline{BP}$ دو وتر کھینچیں شکل کے مطابق $\angle 1$ اور $\angle 2$ بنائیں۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
	$\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$ میں
ایک ہی دائرے کے رداس	$m\,\overline{OA} = m\,\overline{OB}$
$\overline{OP}$ مرکزی زاویہ $\angle AOB$ کا ناصف ہے۔(معلوم)۔	$m\angle 1 = m\angle 2$
مشترک	اور $m\,\overline{OP} = m\,\overline{OP}$
$(S.A.S \cong S.A.S)$	$\Delta OAP \cong \Delta OBP$
متماثل مثلثوں کے متماثل بازو	اور $\overline{AP} \cong \overline{BP}$
دائرے میں متماثل وتروں کے سامنے قوسیں	پس $\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$

مثال 2: کسی دائرے میں قطروں کا کوئی جوڑا ایک دوسرے پر عمود ہو تو اِن کے سروں کو ترتیب وار ملانے سے مربع بنتا ہے۔



معلوم: O مرکز والے دائرے میں دو قطر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ قطروں کے سروں کو بالترتیب ملانے سے $ABCD$ ایک چوکور بنتی ہے۔

مطلوب: $ABCD$ ایک مربع شکل ہے۔

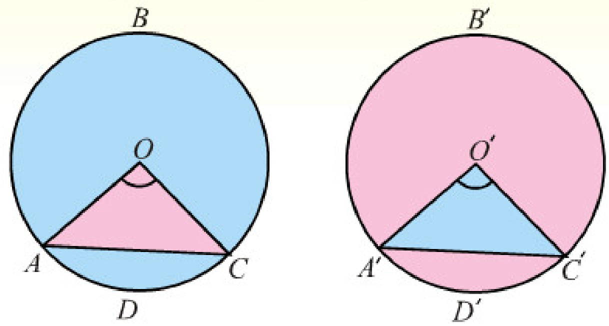
عمل: دی ہوئی شکل کے مطابق $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ لکھیں۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
قطروں کا جوڑا ایک دوسرے پر عمود ہے۔ (معلوم)	$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 90^\circ$
دائرے میں مساوی مرکزی زاویوں کی متقابلہ قوسیں	اس لیے $m\,\widehat{AB} = m\,\widehat{BC} = m\,\widehat{CD} = m\,\widehat{DA}$
مساوی قوسوں کے وتر	$m\,\overline{AB} = m\,\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{DA}$ (i)
	نیز $m\angle A = m\angle 5 + m\angle 6$
	$45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ (ii)
	اِسی طرح
	$m\angle A = m\angle C = m\angle D = 90^\circ$ (iii)
(i) اور (ii) (iii) کی رو سے	پس $ABCD$ ایک مربع ہے۔

مسئلہ 4

11.1(iv) دو متماثل دائروں یا ایک دائرہ میں اگر دو مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوں تو ان زاویوں کو بنانے والے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: دو مساوی دائروں $ABCD$ اور $A'B'C'D'$ کے مراکز بالترتیب O اور O' ہیں۔ $\overline{AC}$ اور $\overline{A'C'}$ دونوں دائروں کے بالترتیب وتر ہیں اور $m\angle AOC = m\angle A'O'C'$

مطلوب: $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OAC \longleftrightarrow \Delta O'A'C'$ میں	
$m\overline{OA} = m\overline{O'A'}$	دو متماثل دائروں کے رداس
$m\angle AOC = m\angle A'O'C'$	معلوم
$m\overline{OC} = m\overline{O'C'}$	دو متماثل دائروں کے رداس
اس لیے $\Delta OAC \cong \Delta O'A'C'$	$SAS \cong SAS$
پس $m\overline{AC} = m\overline{A'C'}$	

مشق 11.1

-1 ایک دائرے میں دو مساوی قطر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کریں کہ $m\ \overline{AD} = m\ \overline{BC}$

-2 ثابت کریں کہ کسی دائرے میں دو متوازی اور مساوی وتروں کے درمیان بننے والی قوسیں مساوی ہوتی ہیں۔

-3 ہندسی طور پر ثابت کریں کہ باہم تنصیف کرنے والے وتر دائرے کے قطر ہونگے۔

-4 ایک دائرے کا مرکز O ہے۔ اِس میں قوس ACB کا وسطی نقطہ C ہے۔ ثابت کریں کہ قطعہ خط $\overline{OC}$ وتر $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے۔

متفرق مشق 11

کثیر الانتخابی سوالات

-1 دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) ایک 4 سم لمبائی والا وتر مرکز پر 60^o کا زاویہ بناتا ہے۔ دائرے کا رداس ________ ہو گا۔

(a) 1 سم (b) 2 سم

(c) 3 سم (d) 4 سم

(ii) ایک دائرے میں وتر اور رداس کی لمبائیاں برابر ہیں۔ وتر سے بننے والا مرکزی زاویہ ________ ہو گا۔

(a) 30^o (b) 45^o

(c) 60^o (d) 75^o

(iii) ایک دائرے کی دو متماثل قوسوں میں سے اگر ایک قوس کا مرکزی زاویہ 30^o ہو تو دوسری کا مرکزی زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) 15^o (b) 30^o

(c) 45^o (d) 60^o

(iv) ایک قوس کا مرکزی زاویہ 40^o ہے اُسکے متعلقہ وتر کا مرکزی زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) 20^o (b) 40^o

(c) 60^o (d) 80^o

(v) دو متماثل مرکزی زاویے جن دو وتروں سے بنتے ہیں۔ وہ آپس میں ________ ہوں گے۔

(a) متماثل (b) غیر متماثل

(c) متراکب (d) متوازی

(vi) ایک قوس کا مرکزی زاویہ 60^o ہے اُسکے وتر کا مرکزی زاویہ ________ ہو گا۔

(a) 20^o (b) 40^o

(c) 60^o (d) 80^o

(vii) دائرے کے نصف محیط کا مرکزی زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) 90^o (b) 180^o

(c) 270^o (d) 360^o

(viii) اگر دائرے کا وتر مرکزی زاویہ 180^o بنائے تو وتر کی لمبائی ________ ہو گی۔

(a) رداس سے کم (b) رداس کے برابر

(c) رداس کا دوگنا (d) اِن میں سے کوئی نہیں

(ix) اگر ایک دائرے کا وتر مرکزی زاویہ 60^o بناتا ہے تب وتر اور رداس کی لمبائیاں آپس میں ________ ہوتی ہیں۔

(a) برابر (b) غیر برابر

(c) متوازی (d) عمود

(x) ایک دائرے میں دو غیر متماثل مرکزی زاویوں کے سامنے والی قوسیں ________ ہوتی ہیں۔

(a) متماثل (b) غیر متماثل

(c) متوازی (d) عمود

خلاصہ

- کسی دائرے میں گومنے والے نقطہ سے اُسی نقطہ تک بننے والا راستہ، **محیط** کہلاتا ہے جبکہ محیط کا ایک ٹکڑا دائرے کی **قوس** کہلاتا ہے۔
- محیط پر دیے ہوئے دو نقاط کو ملانے وَالا قطعہ خط دائرے کا **وَتر** ہوتا ہے۔
- دائرے کا وہ ٹکڑا جو اِسکی قوس اور متعلقہ وَتر نے گھیرا ہو **قطعہ دائرہ** کہلاتا ہے۔
- دائرہ کے دو رداسی قطعات اور اُن سے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا علاقہ **دَائرے کا سیکٹر** کہلاتا ہے۔
- کسی دائرے کے مرکز سے گزرنے وَالا قطعہ خط وتر کی تنصیف کرے تو وہ وتر پر عمود ہو گا نیز قطعہ خط جو دائرے کے وتر کی عمودی تنصیف کرے۔ وہ دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں متماثل ہوں تو ان کے وتر کی لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو وہ دو متماثل قوسیں قطع کرتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو وتر لمبائی میں برابر ہوں تو ان سے بننے والے مرکزی زاویے بھی مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔
- دو متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو مرکزی زاویے مقدار میں برابر ہوں تو ان زاویوں کو بنانے والے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔

یونٹ 12

قطعہ دائرہ میں زاویہ
(ANGLE IN A SEGMENT OF A CIRCLE)

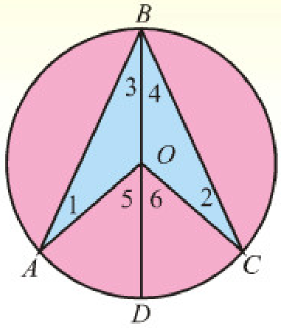
طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

درج ذیل اثباتی مسائل بمعہ نتائج صریح کو ثابت کرنا اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیے ان کا استعمال کرنا۔

- کسی دائرے میں قوس صغیرہ سے بننے والا مرکزی زاویہ مقدار میں اپنی متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے سے دوگنا ہوتا ہے۔
- زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں، باہم برابر ہوتے ہیں۔
- زاویہ جو نصف قطعہ دائرہ میں ہو قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے بڑے قطعہ دائرے میں ہو حادہ زاویہ ہوتا ہے اور جو نصف سے چھوٹے قطعہ دائرے میں ہو، منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔
- کسی دائرے کی دائروی چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

مسئلہ 1

12.1 (i) کسی دائرے میں قوسِ صغیرہ سے بننے والا مرکزی زاویہ مقدار میں اپنی متعلقہ قوسِ کبیرہ کے محصور زاویے سے دوگنا ہوتا ہے۔



معلوم: O مرکز والے دائرے میں $\widehat{AC}$ قوسِ صغیرہ ہے جبکہ $\angle AOC$ اِسکا مرکزی زاویہ اور متعلقہ قوسِ کبیرہ کا محصور زاویہ ABC ہے۔

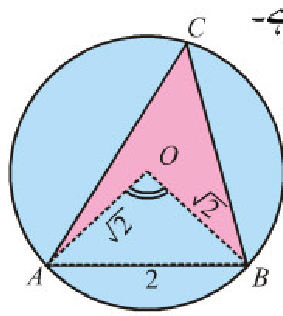
مطلوب: $m\angle AOC = 2m\angle ABC$

عمل: نقطہ B کو O سے ملا کر اتنا بڑھائیں کہ یہ دائرہ کو نقطہ D پر قطع کرے۔
دی ہوئی شکل کے مطابق $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ لکھیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
کیونکہ (i) $m\angle 1 = m\angle 3$	ΔOAB میں مساوی اضلاع کے مخالف زاویے
اور (ii) $m\angle 2 = m\angle 4$	ΔOBC میں مساوی اضلاع کے مخالف زاویے
اب (iii) $m\angle 5 = m\angle 1 + m\angle 3$	مثلث میں خارجہ زاویہ متقابلہ داخلہ زاویوں کے مجموعہ کے برابر
اسی طرح (iv) $m\angle 6 = m\angle 2 + m\angle 4$	
$m\angle 5 = m\angle 3 + m\angle 3 = 2m\angle 3$ (v)	(i)اور(iii) کی رو سے
اور $m\angle 6 = m\angle 4 + m\angle 4 = 2m\angle 4$ (vi)	(ii)اور(iv) کی رو سے
$m\angle 5 + m\angle 6 = 2m\angle 3 + 2m\angle 4$	(v)اور(vi) کو جمع کرنے سے
$m\angle AOC = 2(m\angle 3 + m\angle 4) = 2m\angle ABC$	شکل کے مطابق

مثال 1: ایک دائرے کا رداس $2\sqrt{}$ سم ہے۔ ایک 2 سم لمبائی کا وتر دائرے کو دو قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کریں۔ کہ قطعہ کبیرہ میں زاویہ 45^{o} بنتا ہے۔



معلوم: O مرکز والے ایک دائرے کارداس $\sqrt{2}$ سم ہے۔ 2 سم لمبائی والے وتر $\overline{AB}$ دائرے کو دو قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔

یعنی $\sqrt{2}$ سم $m\overline{OA} = m\overline{OB}$ دائرے کو دو قطعات میں تقسیم کرتا ہے۔ جس میں ACB قطعہ کبیرہ ہے۔

مطلوب: $m\angle ACB = 45^o$

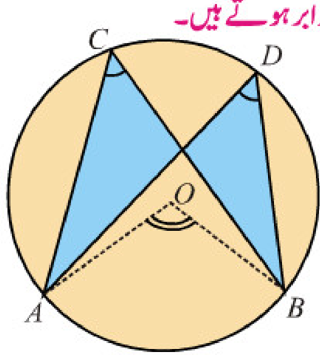
عمل: نقطہ O کو A اور B سے ملائیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta\ OAB$ میں	
$(OA)^2 + (OB)^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$	$m\overline{OA} = m\overline{OB} = \sqrt{2}$ سم
$= 2 + 2 = 4 = (2)^2 = (AB)^2$	$m\ \overline{AB} = 2$ سم (معلوم)
اس لیے ΔAOB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے	
جس میں $m\ \angle AOB = 90^o$	قوس AB سے بننے والا مرکزی زاویہ
تب $m\angle ACB = \frac{1}{2}\ m\angle AOB$	مسئلہ 1 کی رو سے مرکزی زاویہ محصور زاویے سے دوگنا
$= \frac{1}{2}\ (90^o) = 45^o$	

مسئلہ 2

12.1 (ii) زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں، باہم برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: O مرکز والے دائرے میں $\angle\ ACB$ اور $\angle\ ADB$ محصور زاویے ہیں۔

مطلوب: $m\ \angle ACB = m\ \angle ADB$

عمل: نقطہ O کو A اور B سے ملائیں۔ اِس طرح قوس AB سے بننے والا مرکزی زاویہ AOB ہے۔

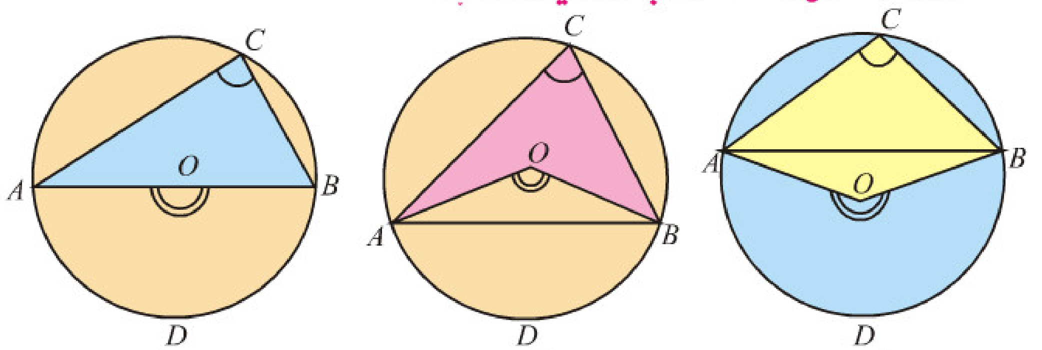
ثبوت:

بیانات	دلائل
دائرے کی قوس AB سے بننے والا مرکزی زاویہ AOB ہے	عمل

اور محصور زاویے ACB اور ADB ہیں۔	معلوم
اسلیے (i) $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	مسئلہ 1 کی رو سے
اور (ii) $m\angle AOB = 2m\angle ADB$	مسئلہ 1 کی رو سے
$2m\angle ACB = 2m\angle ADB$	(i) اور (ii) کی رو سے
پس $m\angle ACB = m\angle ADB$	

مسئلہ 3

12.1 (iii) زاویہ جو نصف قطعہ دائرہ میں ہو' قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے بڑے قطعہ دائرے میں ہو، حادہ زاویہ ہوتا ہے اور جو نصف سے چھوٹے قطعہ دائرے میں ہو' منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔



شکل (I) شکل (II) شکل (III)

معلوم: O مرکز والے دائرے میں وتر $\overline{AB}$ کے لحاظ سے ADB قوس ہے۔ جبکہ AOB مرکزی زاویہ اور $\angle ACB$ محصور زاویہ ہے۔

مطلوب: شکل (I) میں اگر قطعہ دائرہ ACB نصف دائرہ ہے تو قائمہ زاویہ $= m\angle ACB$

شکل (II) میں اگر قطعہ دائرہ ACB نصف دائرے سے بڑا ہے تو قائمہ زاویہ $> m\angle ACB$

شکل (III) میں اگر قطعہ دائرہ ACB نصف دائرے سے کم ہے تو قائمہ زاویہ $< m\angle ACB$

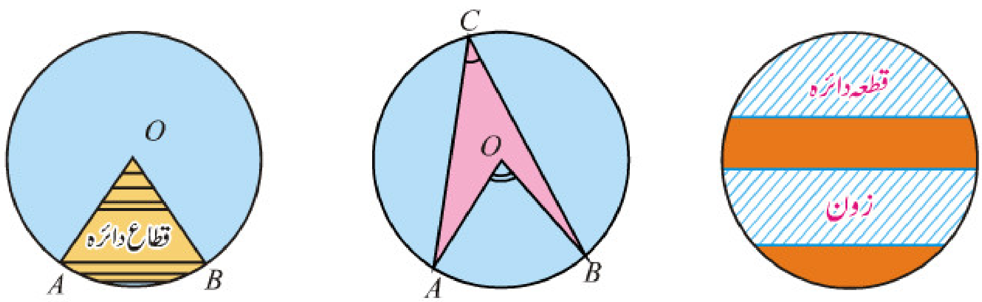
ثبوت:

بیانات	دلائل
O مرکز والے دائرے کی ہر شکل میں $\overline{AB}$ وتر ہے	معلوم
قوس ADB سے بننے والا مرکزی زاویہ AOB ہے۔	معلوم
جبکہ محصور زاویہ ACB ہے۔	مسئلہ 1 کی رو سے

بیان	وجوہات
$m\angle AOB = 2m\angle ACB$ (i)	
شکل (I) میں $m\angle AOB = 180^{o}$	
اس لیے $m\angle AOB = 2\,(90^{o})$ (ii)	
$m\angle ACB =$ قائمہ زاویہ	(i) اور (ii) کی رو سے
شکل (II) میں $m\angle AOB < 180^{o}$	
اس لیے $m\angle AOB <$ قائمہ زاویہ (iii)	
$m\angle ACB <$ قائمہ زاویہ	(i) اور (iii) کی رو سے
شکل (III) میں $m\angle AOB > 180^{o}$	
$\therefore$ $m\angle AOB >$ قائمہ زاویہ (iv)	
$m\angle ACB >$ قائمہ زاویہ	(i) اور (iv) کی رو سے

نتیجہ صریح 1 : کسی دائرے کی ایک قوس سے بننے والے محصور زاویے برابر ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 2 : ایک ہی قطعہ دائرہ میں بننے والے زاویے باہم برابر ہوتے ہیں۔



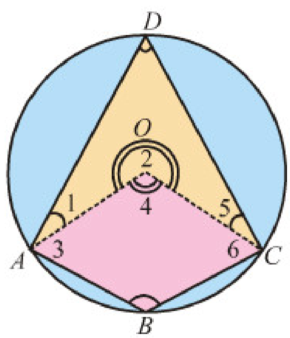
مسئلہ 4

12.1 (iv) کسی دائرے کی دائروی چوکور کے متقابلہ زاویے، سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

معلوم: O مرکز والے دائرہ میں $ABCD$ ایک دائروی چوکور ہے۔

مطلوب: $\begin{cases} m\angle A + m\angle C = 180^{o} \\ m\angle B + m\angle D = 180^{o} \end{cases}$

عمل: نقطہ O کو A اور C سے ملائیں۔ شکل کے مطابق $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ لکھیں۔



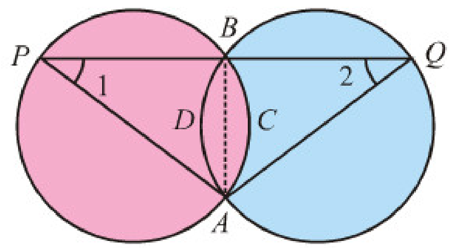
ثبوت:

دلائل	بیانات
O مرکز والے دائرے کی قوس ADC	قوس ADC سے بننے والا مرکزی زاویہ 2 ہے۔
	جبکہ محصور زاویہ B ہے۔
مسئلہ 1 کی رو سے	اس لیے (i) $m\angle B = \frac{1}{2}(m\angle 2)$
O مرکز والے دائرے کی قوس ABC	قوس ABC سے بننے والا مرکزی زاویہ 4 ہے۔
	جبکہ محصور زاویہ D ہے۔
مسئلہ 1 کی رو سے	اس لیے (ii) $m\angle D = \frac{1}{2}(m\angle 4)$
(i) اور (ii) جمع کرنے سے	$m\angle B + m\angle D = \frac{1}{2}m\angle 2 + \frac{1}{2}m\angle 4$
(کلی مرکزی زاویہ $m\angle 2 + m\angle 4 = 360^{\circ}$	$= \frac{1}{2}(m\angle 2 + m\angle 4)$
	یعنی، $m\angle B + m\angle D = \frac{1}{2}(4\angle rt) = 2\angle rt$
	اِسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $m\angle A + m\angle C = 2\angle rt$

نتیجہ صریح 1 : دو مساوی دائروں یا ایک ہی دائرہ میں دو صغیرہ قوسیں مساوی ہوں تو متعلقہ دو کبیرہ قوسوں پر بننے والے محصور زاویے بھی مساوی ہونگے۔

نتیجہ صریح 2 : اگر دو مساوی دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو قوسیں برابر ہوں تو محصور زاویے آپس میں برابر ہوں گے۔ نیز اِس نتیجہ کا عکس بھی درست ہو گا۔

مثال 1: دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ B میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خطِ دائروں کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔



معلوم: دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ B میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خط PBQ دائروں کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔

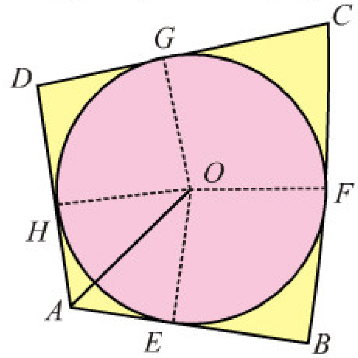
مطلوب: $m\overline{AP} = m\overline{AQ}$

عمل: نقاط A اور B کو ملائیں۔ شکل کے مطابق 1∠ اور 2∠ لکھیں۔

ثبوت:

بیانات		دلائل
کیونکہ	$m\,\widehat{ACB} = m\widehat{ADB}$	مشترک وتر AB کے سامنے قوسوں کی لمبائی
اس لیے	$m\angle 1 = m\angle 2$	قوسوں کے متقابلہ زاویے
پس	$m\overline{AQ} = m\overline{AP}$	ΔAPQ میں مساوی زاویوں کے مقابل اضلاع
یا	$m\overline{AP} = m\overline{AQ}$	

مثال 2: اگر چوکور $ABCD$ ایک دائرے کو محیط کیے ہوئے ہو تو ثابت کریں $m\overline{AB} + m\overline{CD} = m\overline{BC} + m\overline{DA}$



معلوم: O مرکز والے دائرے کو چوکور $ABCD$ نے اس طرح محیط کیا ہے کہ چوکور کا ہر ضلع دائرے پر مماس ہے۔

مطلوب: $m\overline{AB} + m\overline{CD} = m\overline{BC} + m\overline{DA}$

عمل: $\overline{OF} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{OG} \perp \overline{CD}$ اور $\overline{OH} \perp \overline{DA}$ کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات		دلائل
(i)	$m\overline{AE} = m\overline{HA}$; $m\overline{EB} = m\overline{BF}$	کسی بیرونی نقطہ سے دائرے پر بنائے گئے مماس آپس میں برابر ہیں۔
(ii)	$m\overline{CG} = m\overline{FC}$ and $m\overline{GD} = m\overline{DH}$	
	$(m\overline{AE} + m\overline{EB}) + (m\overline{CG} + m\overline{GD})$	(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$= (m\overline{BF} + m\overline{FC}) + (m\overline{DH} + m\overline{HA})$$

یا $m\overline{AB} + m\overline{CD} = m\overline{BC} + m\overline{DA}$

مشق 12.1

-1 ثابت کریں کہ کسی دی ہوئی دائروی چوکور کے متقابلہ زاویوں کا مجموعہ 180° کے برابر ہے۔

-2 ثابت کریں کہ دائروی متوازی الاضلاع ایک مستطیل ہوگی۔

-3 O مرکز والے دائرے کے AOB اور COD دو متقاطع وتر ہیں۔ ثابت کریں کہ AOD اور BOC دو مساوی الزاویہ مثلثان ہیں۔

-4 $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ کسی دائرے کے دو متوازی وَتر ہیں۔ ثابت کریں کہ

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ اور $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

متفرق مشق 12

کثیر الانتخابی سوالات

-1 درج ذیل سوالات کے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) کسی قائمۃ الزاویہ ΔABC میں 3 سم $= m\overline{AC}$، $m\overline{BC} = 4$ سم اور $m\angle C = 90^\circ$ اِس مثلث کے راسوں میں سے گزرنے والے دائرے کا رداس ہے۔

(a) 1.5 cm (b) 2.0 cm

(c) 2.5 cm (d) 3.5 cm

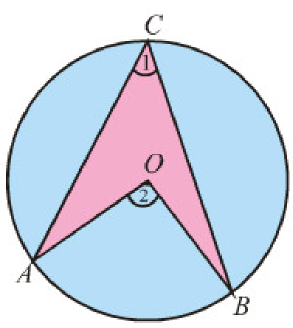
(ii) شکل میں AB ایک ہی قوس پر مرکزی اور محصور زاویے بنتے ہیں۔ تب

(a) $m\angle 1 = m\angle 2$

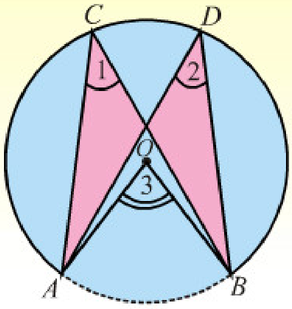
(b) $m\angle 1 = 2m\angle 2$

(c) $m\angle 2 = 3m\angle 1$

(d) $m\angle 2 = 2m\angle 1$



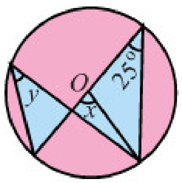
(iii) شکل میں اگر $m\angle 3 = 75^o$ تب $m\angle 1$ اور $m\angle 2$ معلوم کیجیے۔



(a) $37\frac{1}{2}^o, 37\frac{1}{2}^o$ (b) $37\frac{1}{2}^o, 75^o$

(c) $75^o, 37\frac{1}{2}^o$ (d) $75^o, 75^o$

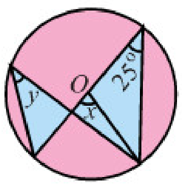
(iv) دائرے کا مرکزی نقطہ O معلوم ہو تو نشان زدہ زاویہ x ہو گا۔



(a) $12\frac{1}{2}^o$ (b) 25^o

(c) 50^o (d) 75^o

(v) دائرے کا مرکزی نقطہ O معلوم ہو تو نشان زدہ زاویہ y ہو گا۔



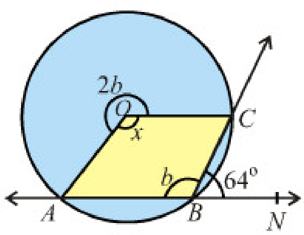
(a) $12\frac{1}{2}^o$ (b) 25^o

(c) 50^o (d) 75^o

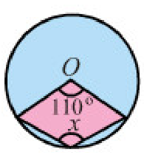
(vi) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے اور $\overleftrightarrow{ABN}$ ایک خطِ مستقیم ہو تو منفرجہ زاویہ AOC، x ________ ہے۔

(a) 32^o (b) 64^o

(c) 96^o (d) 128^o



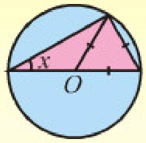
(vii) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب زاویہ x ________ ہے۔



(a) 55^o (b) 110^o

(c) 220^o (d) 125^o

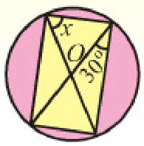
(viii) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب زاویہ x ________ ہے۔



(a) 15^{o} (b) 30^{o}

(c) 45^{o} (d) 60^{o}

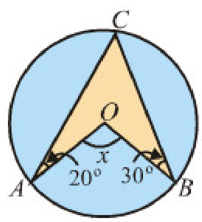
(ix) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب x ________ ہے۔



(a) 15^{o} (b) 30^{o}

(c) 45^{o} (d) 60^{o}

(x) شکل میں دائرے کا مرکز O ہے تب x ________ ہے۔



(a) 50^{o} (b) 75^{o}

(c) 100^{o} (d) 125^{o}

خلاصہ

- ایک قوس دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بناتی ہے اسے **مرکزی زاویہ** کہتے ہیں۔
- مرکزی زاویہ دائرے کے مرکز پر دو راسوں اور ایک قوس سے بنتا ہے۔
- دائرے کی ایک قوس جو اس کے محیط پر زاویہ بناتی ہے اس کو **محاصر زاویہ** کہتے ہیں۔
- دائرے کے کوئی سے دو وتر جو محیط پر مشترک نقطہ پر ملیں ان سے بننے والا زاویہ **محاصر زاویہ** کہلاتا ہے۔
- وہ چوکور، **سائیکلک** کہلاتی ہے جس کے چاروں راسوں سے دائرہ کھینچا جا سکتا ہو۔
- کسی دائرے میں قوس صغیرہ سے بننے والا مرکزی زاویہ مقدار میں اپنی متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے سے دو گنا ہوتا ہے۔
- زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں، باہم برابر ہوتے ہیں۔
- زاویہ جو نصف دائرہ میں ہو قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے بڑے قطعہ دائرے میں ہو حادہ زاویہ ہوتا ہے۔ جو نصف سے چھوٹے قطعہ دائرے میں ہو، منفرجہ زاویہ ہوتا ہے۔
- کسی دائرے کی سائیکلک چوکور کے متقابلہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

یونٹ 13

عملی جیومیٹری۔ دائرے
(PRACTICAL GEOMETRY-CIRCLES)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- دیے ہوئے دائرے کا مرکز دریافت کرنا۔
- دیے ہوئے تین غیر خطی (غیر ہم خط) نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچنا۔
- ایک دائرہ مکمل کرنا جبکہ اس کے محیط کا ایک حصہ دیا ہوا ہو۔
  (i) مرکز معلوم کر کے (ii) بغیر مرکز معلوم کئے
- دی ہوئی مثلث پر محاصر دائرہ کھینچنا۔
- دی ہوئی مثلث کا محصور دائرہ کھینچنا۔
- دی ہوئی مثلث کا جانبی دائرہ کھینچنا۔
- دیے ہوئے دائرے پر محاصر مساوی الاضلاع مثلث بنانا۔
- دیے ہوئے دائرے کی محصور مساوی الاضلاع مثلث بنانا۔
- دیے ہوئے دائرے پر محاصر مربع بنانا۔
- دیے ہوئے دائرے کا محصور مربع بنانا۔
- دیے ہوئے دائرے پر منظم محاصر مسدس بنانا۔
- دیے ہوئے دائرے کی منظم محصور مسدس بنانا۔
- بغیر مرکز معلوم کئے دی ہوئی قوس کے درمیانی نقطے P سے مماس کھینچنا۔
- بغیر مرکز معلوم کئے دی ہوئی قوس کے کسی آخری نقطے P سے مماس کھینچنا۔
- بغیر مرکز معلوم کئے دی ہوئی قوس کے بیرونی نقطے P سے مماس کھینچنا۔
- نقطہ P جو دیئے ہوئے دائرے پر ہو، سے مماس کھینچنا۔
- نقطہ P جو دیے ہوئے دائرے کے باہر ہو، سے مماس کھینچنا۔
- دائرے کے دو مماس کھینچنا۔ جو باہم دیا ہوا زاویہ بناتے ہوں۔
- دو مساوی دائروں پر دوراست مشترک مماس کھینچنا اور دو مساوی دائروں پر دو معکوس مشترک مماس کھینچنا۔
- دو غیر مساوی دائروں پر دوراست مشترک مماس کھینچنا اور دو غیر مساوی دائروں پر دو معکوس مشترک مماس کھینچنا۔
- دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں اور دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں پر مماس کھینچنا۔
- دائرہ کھینچنا (i) جو دیے ہوئے زاویہ کے دونوں بازوؤں کو مس کرے۔
  (ii) جو دو ہم نقطہ خطوط کے درمیانی نقطہ سے گزرے اور اسکے بازوؤں کو مس کرے۔
  (iii) جو تین ہم نقطہ خطوط کو مس کرے۔

تعارف (Introduction)

لفظ جیومیٹری دو یونانی الفاظ جیو (زمین) اور میٹرون (پیمائش) سے اخذ کیا گیا ہے۔ دراصل جیومیٹری کا مطلب زمین کی پیمائش ہے۔ جیومیٹری، ریاضی کی ایک اہم شاخ ہے جس میں شکلوں (Figures) کی بناوٹ (Shape)، جسامت (Size) اور حالت (Position) کے متعلق بحث ہوتی ہے۔ ہم اس یونٹ میں سادہ شکلوں جیسے نقطہ، سیدھی لائن، مثلث، کثیر الاضلاع اور دائرہ پر توجہ مرکوز کرتے ہیں۔

جیومیٹری سے متعلق یونانی ریاضی دانوں (300-600 BC) کا نمایاں حصہ ہے۔ خاص طور پر اقلیدس کی مبادیات "Euclid's Elements" کو کئی صدیوں تک پوری دنیا میں بطور ٹیکسٹ بکس پڑھایا جاتا رہا۔

3.1 دائرے کی ساخت

کسی بھی رداس کا دائرہ ایک مخصوص نقطہ O سے پرکار گھمانے سے بنایا جاسکتا ہے۔

3.1(i) دیے گئے دائرے کا مرکز معلوم کرنا

معلوم: ایک دائرہ

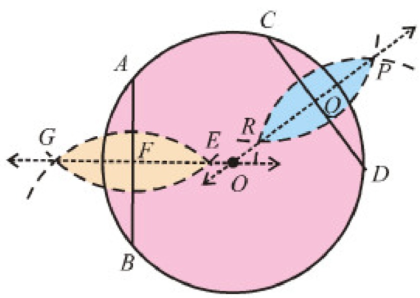
ساخت کے اقدام:

1- دو وتر $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کھینچیے۔

2- وتر $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{EFG}$ کھینچا۔

3- وتر $\overline{CD}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQR}$ کھینچا۔

4- عمودی ناصف $\overleftrightarrow{EFG}$ اور $\overleftrightarrow{PQR}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ O دائرے کا مرکز ہے۔



شکل 13.1.1

3.1(ii) دیے ہوئے تین غیر خطی (غیر ہم خط) نقاط سے گزرتا ہوا دائرہ کھینچنا:

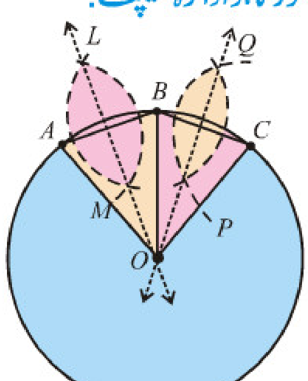
معلوم: تین غیر خطی (غیر ہم خط) نقاط A، B اور C ہیں۔

ساخت کے اقدام:

1- A کو B سے اور B کو C سے ملائیں۔

2- $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے بالترتیب عمودی ناصف $\overleftrightarrow{LM}$ اور $\overleftrightarrow{PQ}$ کھینچیے۔ $\overleftrightarrow{LM}$ اور $\overleftrightarrow{PQ}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

3- نقطہ O سے رداس $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC}$ کا دائرہ کھینچیں جو کہ مطلوبہ دائرہ ہے۔

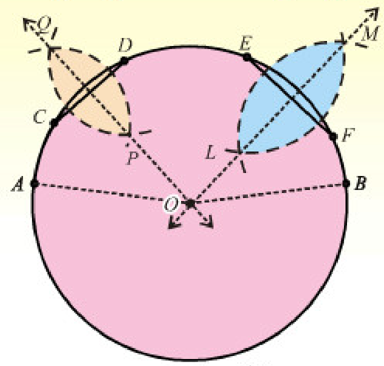


شکل 13.1.2

13.1(iii-a) مرکز معلوم کر کے دائرہ مکمل کرنا جب محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو:

معلوم: $\widehat{AB}$ دائرے کے محیط کا حصہ ہے۔

ساخت کے اقدام:



شکل 13.1.3

-1 فرض کریں کہ چار نقاط C،D،E اور F (دی ہوئی قوس AB) پر لیے۔

-2 وتر $\overline{CD}$ اور $\overline{EF}$ کھینچیے۔

-3 وتر $\overline{CD}$ پر عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQ}$ اور وتر $\overline{EF}$ پر عمودی ناصف $\overleftrightarrow{LM}$ کھینچیے۔

-4 $\overleftrightarrow{LM}$ اور $\overleftrightarrow{PQ}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

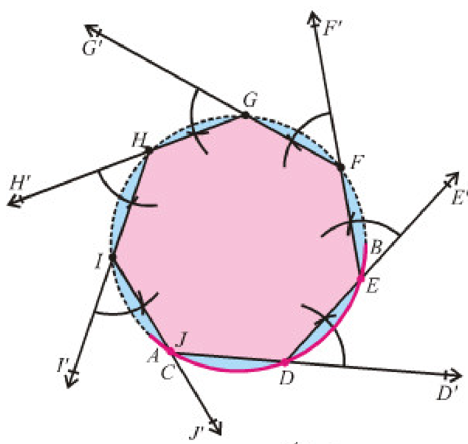
$\therefore$ نقاط A،B،C،D،E اور F نقطہ O سے مساوی فاصلے پر ہیں۔

-5 مرکز O اور رداس $(m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = m\overline{OE} = m\overline{OF})$ سے کا دائرہ مکمل کریں۔ یہ دائرہ نقاط A،B،C،D،E اور F سے گزرے گا۔

13.1(iii-b) بغیر مرکز معلوم کیے دائرہ مکمل کرنا جبکہ اس کے محیط کا ایک حصہ دیا گیا ہو۔

معلوم: $\widehat{AB}$ دائرے کے محیط کا ایک حصہ ہے۔

ساخت کے اقدام:



شکل 13.1.4

-1 دو مناسب اور برابر لمبائی والے وتر $\overline{CD}$ اور $\overline{DE}$ لیں جن کے نقاط C،D اور E قوس $\widehat{AB}$ پر ہوں۔

-2 $\overline{CD}$ کو D' اور $\overline{DE}$ کو E' تک بڑھائیں تاکہ بیرونی زاویہ $D'DE'$ حاصل ہو۔

-3 بیرونی زاویہ $E'EF$ کو زاویے $D'DE'$ کے برابر بنائیں اور وتر $\overline{EF}$ کو $m\overline{CD}$ یا $m\overline{DE}$ کے برابر لیں۔ $\overline{EF}$ کو F' تک بڑھائیں۔

-4 بیرونی زاویہ $F'FG$ کو زاویے $E'EF'$ کے برابر بنائیں اور وتر $\overline{FG}$ کو $m\overline{CD}$ کے برابر لیں۔ $\overline{FG}$ کو G' تک بڑھائیں۔

-5 نقاط F اور G مطلوبہ دائرے کے محیط پر ہیں۔ نقطوں کے ذریعے $\widehat{EF}$ اور $\widehat{FG}$ کو شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

-6 بیرونی برابر زاویوں کے عمل کو جاری رکھیں تاکہ دائرے کا محیط مکمل ہو جائے جیسا کہ شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

نوٹ: اندرونی برابر زاویوں کی مدد سے بھی دائرے کے محیط کو مکمل کیا جا سکتا ہے۔

مشق 13.1

-1 کسی لمبائی کی ایک قوس کو تقسیم کریں۔
(i) دو برابر حصوں میں
(ii) چار برابر حصوں میں

-2 ایک قوس ABC کے مرکز کو عملی طور پر معلوم کریں۔

-3 (i) اگر کسی قوس کے دو وتروں $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کی لمبائیاں بالترتیب 3 سم اور 4 سم ہوں تو قوس کا مرکز معلوم کریں۔
(ii) اگر کسی قوس کے دو وتروں $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کی لمبائیاں بالترتیب 3.5 سم اور 5 سم ہوں تو قوس کا مرکز معلوم کریں۔

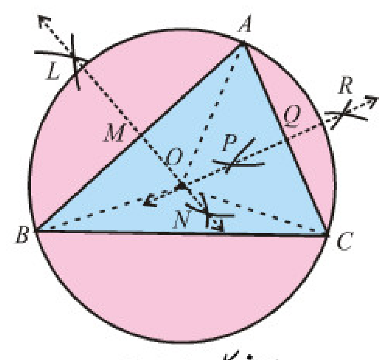
-4 ایک قوس کے وتروں $\overline{PQ}$ اور $\overline{QR}$ کے دو عمودی ناصف کھینچیں۔ نقاط P، Q اور R سے گزرتا ہوا دائرہ بنائیں۔

-5 6 سینٹی میٹر درمیانی فاصلہ والے نقاط A اور B سے گزرتا ہوا 5 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ کھینچیں نیز دائرے کے مرکز سے $\overline{AB}$ کا فاصلہ معلوم کریں۔

-6 اگر $|\overline{AB}| = 4\ \text{cm}$ اور $|\overline{BC}| = 6\ \text{cm}$ ہوں اس طرح کہ $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ پر عمود ہو $(\overline{AB} \perp \overline{BC})$ تو A، B اور C سے گزرتا دائرہ بنائیں نیز اس کا رداس معلوم کریں۔

13.2 کثیر الاضلاعوں سے منسلک دائرے:

13.2(i) دی ہوئی مثلث کے گرد دائرہ (محاصر دائرہ) بنانا:



شکل 13.2.1

معلوم: ABC ایک مثلث ہے۔

ساخت کے اقدام:

-1 ضلع $\overline{AB}$ پر عمودی ناصف $\overleftrightarrow{LMN}$ کھینچیں۔

-2 ضلع $\overline{AC}$ پر عمودی ناصف $\overleftrightarrow{PQR}$ کھینچیں۔

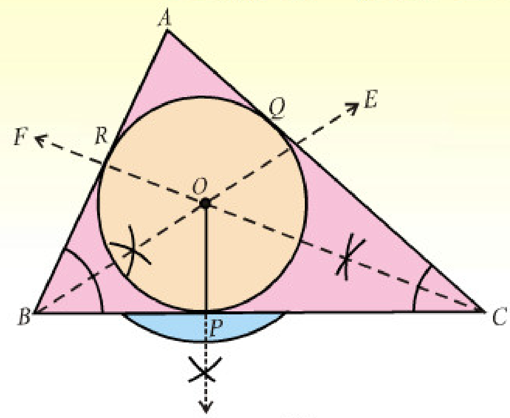
-3 $\overleftrightarrow{LN}$ اور $\overleftrightarrow{PR}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

-4 O مرکز سے رداس $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC}$ کا دائرہ کھینچیں۔

یہ دائرہ نقاط A، B اور C سے گزرے گا جبکہ O محاصر دائرہ کا محاصر مرکز ہے۔

یاد رکھیں کہ : مثلث ABC کے راسوں سے گزرتا ہوا دائرہ بطور محاصر دائرہ، اس کا رداس بطور محاصر رداس اور مرکز بطور محاصر مرکز پہچانے جاتے ہیں۔

13.2(ii) دی ہوئی مثلث کے اندر دائرہ (محصور دائرہ) بنانا۔



شکل 13.2.2

معلوم: ABC ایک مثلث ہے۔

ساخت کے اقدام:

1- زاویوں ABC اور ACB کی تنصیف کے لیے بالترتیب $\overrightarrow{BE}$ اور $\overrightarrow{CF}$ ناصف کھینچیں۔ شعاعیں $\overrightarrow{BE}$ اور $\overrightarrow{CF}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتی ہیں۔

2- نقطہ O محصور دائرے کا مرکز ہے۔

3- نقطہ O سے $\overline{BC}$ پر $\overrightarrow{OP}$ عمود کھینچیں۔

مرکز O سے رداس $m\overline{OP}$ کا دائرہ کھینچیں۔ یہ دائرہ مثلث ABC کا محصور دائرہ ہے۔

یاد رکھیں کہ : کہ دائرہ جو مثلث کے ضلعوں کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔ بطور محصور دائرہ پہچانا جاتا ہے۔ اس کا رداس بطور محصور رداس اور مرکز بطور محصور مرکز پہچانے جاتے ہیں۔

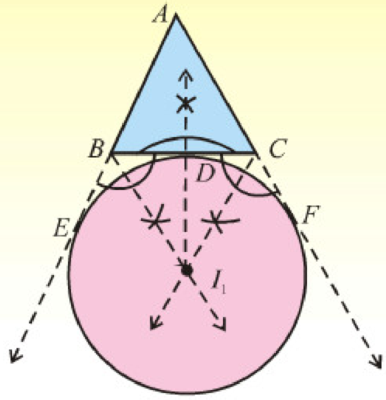
13.2(iii) دی ہوئی مثلث کا جانبی دائرہ بنانا۔

معلوم: ABC ایک مثلث ہے۔

ساخت کے اقدام:

1- مثلث ABC کے اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کو آگے بڑھائیں۔

2- بیرونی زاویوں ABC اور ACB کے ناصف کھینچیں۔ بیرونی زاویوں کو یہ ناصف نقطہ I_1 پر ملتے ہیں۔



شکل 13.2.3

-3 نقطہ I سے ضلع $\overline{BC}$ پر عمود کھینچیں۔ جو $\overline{BC}$ کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔ $\overline{I_1D}$ جانبی دائرے کا رداس اور نقطہ I_1 مرکز ہے۔

-4 مرکز I_1 سے رداس $m\overline{I_1D}$ کا دائرہ کھینچیں جو کہ ΔABC کے ضلع BC کو بیرونی اور بڑھے ہوئے اضلاع AB اور AC کو اندرونی طور پر مس کرے گا۔

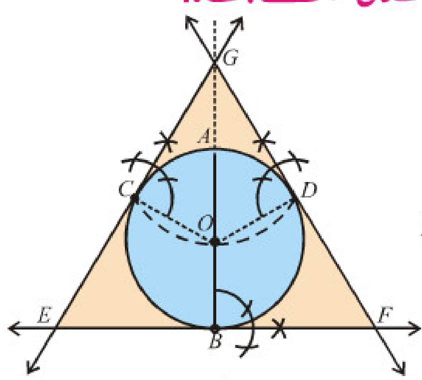
جانبی دائرہ:

وہ دائرہ جو کسی مثلث کے ایک ضلع کو بیرونی طور پر اور بڑھے ہوئے دو اضلاع کو اندرونی طور پر چھوئے جانبی دائرہ (ای دائرہ) کہلاتا ہے۔ ای دائرے کا مرکز ای مرکز اور رداس ای رداس کہلاتے ہیں۔

13.2(iv) دیے ہوئے دائرے کے گرد مساوی الاضلاع مثلث بنانا:

معلوم: مناسب رداس کے دائرے کا مرکز O ہے۔

ساخت کے اقدام:



شکل 13.2.4

-1 دائرے کا قطر $\overline{AB}$ کھینچیں۔

-2 دائرے پر نقاط C اور D کو دریافت کرنے کے لیے مرکز A سے $m\overline{OA}$ رداس کی ایک قوس کھینچیں۔

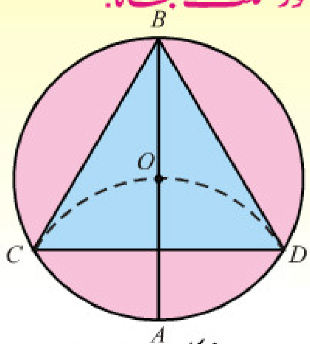
-3 دائرے کے رداس $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ کھینچیں۔

-4 دائرے پر نقاط B، C اور D پر مماس کھینچیں۔

-5 مماسوں کو آگے بڑھائیں تاکہ وہ نقاط E، F اور G پر ملیں۔

دیے ہوئے دائرے کے گرد EFG مطلوبہ محاصر مثلث ہے۔

13.2(v) دیے ہوئے دائرے میں مساوی الاضلاع محصور مثلث بنانا:



شکل 13.2.5

معلوم: مرکز O کا ایک دائرہ۔

ساخت کے اقدام:

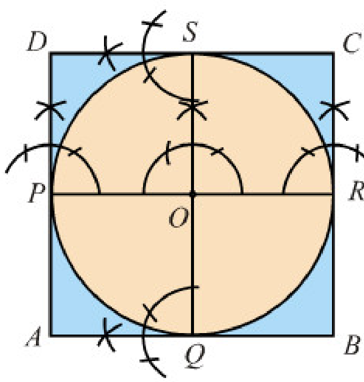
1- دائرے کا ایک قطر $\overline{AB}$ کھینچیں۔

2- نقطہ A سے رداس $\overline{OA}$ کی قوس کھینچیں۔ قوس دائرہ کو نقاط C اور D پر قطع کرتی ہے۔

3- نقاط B، C اور D کو ملائیں تاکہ قطعات $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ اور $\overline{BD}$ حاصل ہوں۔

مثلث BCD مطلوبہ محصور مساوی الاضلاع مثلث ہے۔

13.2(vi) دیے ہوئے دائرے کا محاصر مربع بنانا:



شکل 13.2.6

معلوم: مرکز O کا ایک دائرہ۔

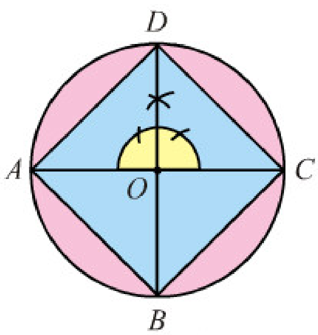
ساخت کے اقدام:

1- دو قطر $\overline{PR}$ اور $\overline{QS}$ کھینچیں جو ایک دوسرے کی عموداً تنصیف کرتے ہیں۔

2- نقاط P، Q، R اور S پر دائرے کے مماس کھینچیں۔

3- ان مماسوں کو آگے اس طرح بڑھائیں تاکہ وہ آپس میں نقاط A، B، C اور D پر ملیں۔ $ABCD$ مطلوبہ محاصر مربع ہے۔

13.2(vii) دیے ہوئے دائرے کا محصور مربع بنانا:



شکل 13.2.7

معلوم: مرکز O کا ایک دائرہ۔

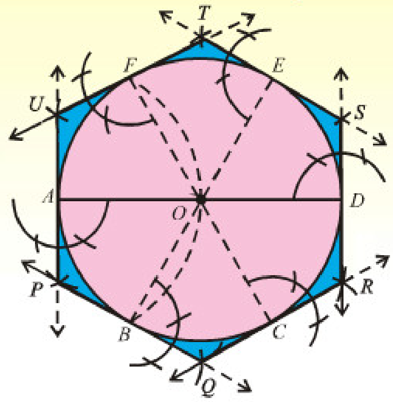
ساخت کے اقدام:

1- دو قطر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ جو کہ ایک دوسرے کی عموداً تنصیف کرتے ہیں، کھینچیں۔

2- A کو B سے، B کو C سے، C کو D سے اور D کو A سے ملائیں۔

$ABCD$ دائرے کا مطلوبہ محصور مربع ہے۔

13.2(viii) دیے ہوئے دائرے کا محاصر مسدس بنانا:



شکل 13.2.8

معلوم: مرکز O کا ایک دائرہ۔

ساخت کے اقدام:

-1 ایک قطر $\overline{AD}$ کھینچیں۔

-2 نقطہ A سے رداس $\overline{AO}$ کی قوس کھینچیں جو دائرے کو نقاط B اور F پر کاٹتی ہے۔

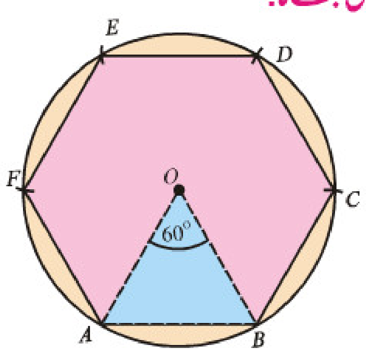
-3 B کو O سے ملائیں اور آگے بڑھائیں تا کہ دائرے کو نقطہ E پر ملے۔

-4 F کو O سے ملائیں اور آگے بڑھائیں تا کہ دائرے کو نقطہ C پر ملے۔

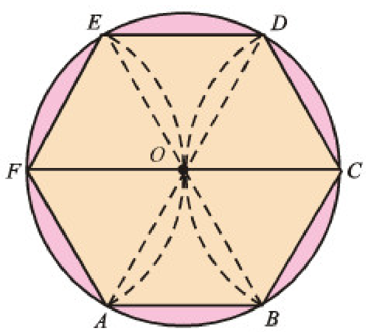
-5 نقاط A،B،C،D،E اور F پر دائرے کے مماس کھینچیں جو ایک دوسرے کو بالترتیب نقاط P،Q،R،S،T اور U پر قطع کریں۔

پس $PQRSTU$ مطلوبہ محاصر مسدس ہے۔

13.2(ix) دیے ہوئے دائرے کی محصور مسدس بنانا:



شکل (a)13.2.9



شکل(b)13.2.9

معلوم: مرکز O کا ایک دائرہ

ساخت کے اقدام:

-1 دائرے پر ایک نقطہ A لو اور اس کو O سے ملاؤ۔

-2 نقطہ A سے، رداس $\overline{OA}$ کی قوس کھینچیں جو دائرے کو نقاط B اور F پر قطع کرتی ہے۔

-3 نقاط O اور A کو نقاط B اور F سے ملائیں۔

-4 مثلثان OAB اور OAF مساوی الاضلاع مثلثیں ہیں۔ اس لیے زاویے AOB اور AOF کی مقدار 60° ہے۔ یعنی

$$m\overline{OA} = m\overline{AB} = m\overline{AF}$$

-5 $\overline{FO}$ کو بڑھائیں تاکہ وہ دائرے کو نقطہ C پر ملے۔ B کو C سے ملائیں کیونکہ $m\angle BOC = 60^\circ$ اس لیے

$$m\overline{BC} = m\overline{OA}$$

-6 C اور F سے رداس $\overline{OA}$ کی قوسیں لگائیں جو کہ دائرے کو نقاط D اور E پر قطع کرتی ہیں۔

-7 C کو D سے، D کو E سے اور E کو F سے ملائیں جس سے

$$m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = m\overline{OE} = m\overline{OF}$$

پس شکل $ABCDEF$ دائرے کے اندر منظم مسدس ہے۔

مشق 13.2

-1 $\Delta\ ABC$ کا محاصر دائرہ بنائیں جب کہ اس کے اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کی لمبائیاں بالترتیب 6 سم، 3 سم اور 4 سم ہوں۔ نیز اس کا محاصر رداس معلوم کریں۔

-2 ΔABC کا محصور دائرہ بنائیں جب کہ اس کے اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کی لمبائیاں بالترتیب 5 سم، 3 سم اور 3 سم ہوں۔ نیز اس کا محصور رداس معلوم کریں۔

-3 راس A کے مقابل مثلث ABC کا جانبی دائرہ بنائیں جب کہ اس کے اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کی لمبائیاں بالترتیب 6 سم، 4 سم اور 3 سم ہوں نیز اس کا رداس معلوم کریں۔

-4 مساوی الاضلاع مثلث ABC کا محاصر دائرہ بنائیں جب کہ اس کے ہر ضلع کی لمبائی 4 سم ہو۔

-5 مساوی الاضلاع مثلث ABC کا محصور دائرہ بنائیں جب کہ اس کے ہر ضلع کی لمبائی 5 سم ہو۔

-6 ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 3 سم، 4 سم، 5 سم ہیں۔ اس کے محاصر اور محصور دائرے بنائیں۔

-7 ایک دائرے کا رداس 4 سم ہے۔ اس کے اندر اور باہر مربع بنائیں۔

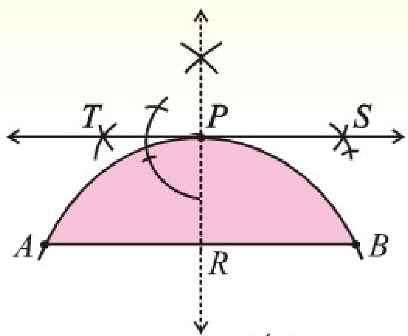
-8 ایک دائرے کا رداس 3.5 سم ہے۔ اس کے اندر اور باہر منظم مسدس بنائیں۔

-9 ایک دائرے کا رداس 3 سم ہے۔ اسکی محاصر منظم مسدس بنائیں۔

13.3 دائرے کا مماس

13.3(i) دی ہوئی قوس کے دیے ہوئے نقطہ P سے مرکز استعمال کیے بغیر مماس کھینچنا:

پہلی صورت : جب P قوس کا درمیانی نقطہ ہو۔



شکل 13.3.1(a)

معلوم: P قوس AB کا درمیانی نقطہ ہے۔

ساخت کے اقدام:

-1 A اور B کو ملائیں۔

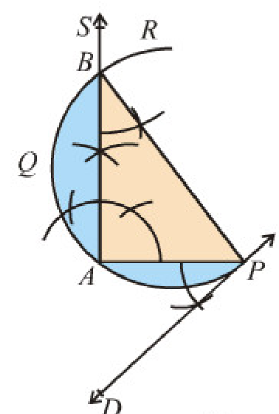
-2 $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں جو قوس AB کے وسطی نقطہ P اور $\overline{AB}$ کے وسطی نقطہ R سے گزرتا ہے۔

-3 نقطہ P پر قائمہ زاویہ TPR بنائیں۔

-4 $\overleftrightarrow{TP}$ کو P کی طرف S سے آگے بڑھائیں۔

پس $\overleftrightarrow{TPS}$ مطلوبہ مماس ہے۔

دوسری صورت : جب P قوس کا آخری نقطہ ہو۔



شکل 13.3.1(b)

معلوم: نقطہ P قوس کا آخری نقطہ ہے۔

ساخت کے اقدام:

-1 قوس PQR پر کوئی نقطہ A لیں۔

-2 نقاط A اور P کو ملائیں۔

-3 نقطہ A سے عمود $\overrightarrow{AS}$ کھینچیں جو قوس PQR کو نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔

-4 نقاط B اور P کو ملائیں۔

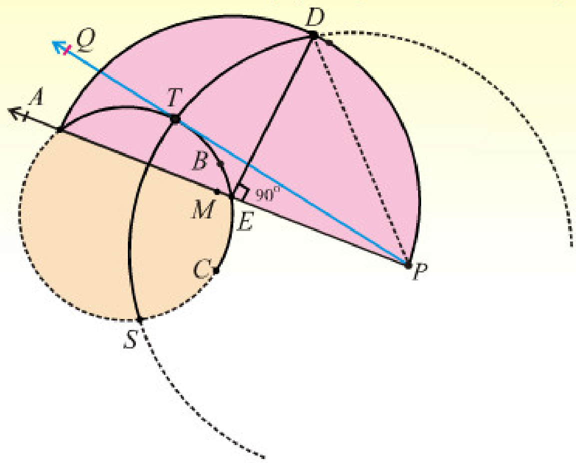
-5 $\angle ABP$ کے برابر $\angle APD$ کھینچیں۔

-6 اب

$$m\angle BPD = m\angle BPA + m\angle APD$$
$$= m\angle BPA + m\angle ABP \quad [\because\ m\angle APD = m\angle ABP]$$
$$= 90^{o}$$

پس $\overleftrightarrow{PD}$ مطلوبہ مماس ہے۔

تیسری صورت : جب نقطہ P قوس سے باہر ہو۔



شکل (c) 13.3.1

معلوم: نقطہ P قوس ABC کے برابر ہے جس کا مرکز نا معلوم ہے۔

ساخت کے اقدام:

-1 نقطہ A کو P سے ملائیں۔ $\overline{AP}$، قوس ABC کو نقطہ E پر قطع کرتا ہے۔

-2 $\overline{AP}$ کا درمیانی نقطہ M معلوم کریں۔

-3 مرکز M سے رداس $|MP| = |AM|$ کا نیمی دائرہ بنائیں۔

-4 نقطہ E پر عمود کھینچیں جو نیمی دائرے کو نقطہ D پر ملے۔

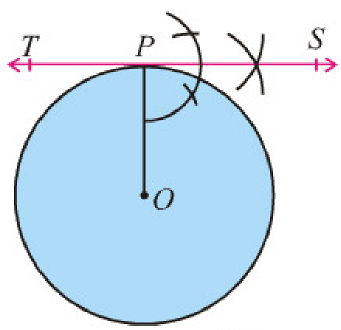
-5 مرکز P سے رداس $|\overline{PD}|$ کی قوس کھینچیں۔

-6 یہ قوس دی ہوئی قوس ABC کو نقطہ T پر قطع کرتی ہے۔

-7 نقطہ P کو نقطہ T سے ملائیں۔

پس $\overrightarrow{PTQ}$ مطلوبہ مماس ہیں۔

13.3(ii-a) دائرے کے محیطی نقطہ P سے مماس کھینچنا۔



شکل 13.3.2(a)

معلوم: O دائرے کا مرکز ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ P ہے۔

ساخت کے اقدام:

-1 نقطہ P کو مرکز O سے ملائیں، تاکہ $\overline{OP}$ دائرے کا رداس ہو۔

-2 ایک خط TPS کھینچیں جو رداس $\overline{OP}$ پر عمود ہو۔

$\therefore$ $\overleftrightarrow{TPS}$ دائرے پر دیے ہوئے نقطہ P سے مطلوبہ مماس ہے۔

(13.3(ii-b دائرے سے ایک مماس کھینچنا جبکہ نقطہ P دائرے سے باہر ہو۔

معلوم: O دائرے کا مرکز ہے اور کوئی نقطہ P دائرے سے باہر ہے۔

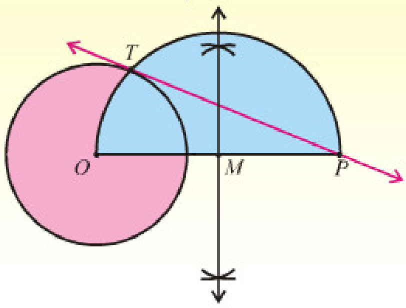
ساخت کے اقدام:

-1 نقطہ P کو مرکز O سے ملائیں۔

-2 $\overline{OP}$ کا وسطی نقطہ M معلوم کریں۔

-3 مرکز M سے قطر $\overline{OP}$ پر نصف دائرہ بنائیں۔ یہ نصف دائرہ دیے ہوئے دائرے کو نقطہ T پر کاٹتا ہے۔

-4 P کو T سے ملائیں اور $\overline{PT}$ کو دونوں اطراف میں بڑھائیں، تب $\overline{PT}$ مطلوبہ مماس ہے۔



شکل (13.3.2(b

(13.3(iii دائرے کے دو مماس کھینچیں جو کہ دیے ہوئے زاویہ پر ایک دوسرے سے ملتے ہیں۔

معلوم: O دائرے کا مرکز ہے اور MNS دیا ہوا زاویہ ہے۔

ساخت کے اقدام:

-1 مرکز O والے دائرے کے محیط پر نقطہ A لیں۔

-2 نقاط O اور A کو ملائیں۔

-3 $m\angle COA$ کو $m\angle MNS$ کے برابر کھینچیں۔

-4 $\overline{CO}$ کو آگے بڑھائیں تاکہ دائرے کو B پر ملے۔

-5 $m\angle AOB = 180^o - m\angle COA$

-6 $\overline{OA}$ پر عمود $\overleftrightarrow{AD}$ کھینچیں۔

-7 $\overline{OB}$ پر عمود $\overleftrightarrow{BE}$ کھینچیں۔

-8 $\overleftrightarrow{AD}$ اور $\overleftrightarrow{BE}$ نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔

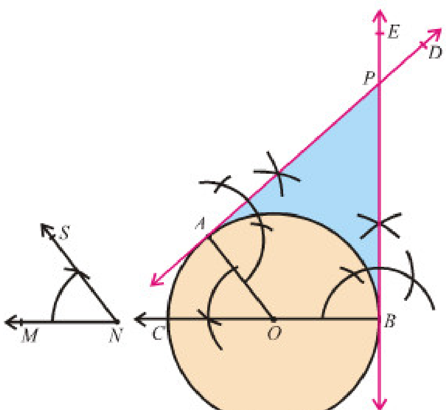
-9 $m\angle AOB + m\angle APB = 180^o$ یعنی $m\angle AOB = 180^o - m\angle APB$

-10 5 اور 9 کی رو سے

$$180^o - m\angle COA = 180^o - m\angle APB \Rightarrow m\angle COA = m\angle APB$$

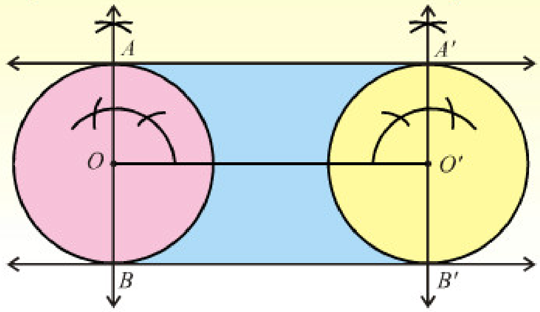
$$\Rightarrow \quad m\angle APB = m\angle MNS \qquad (\because m\angle COA = m\angle MNS)$$

-11 $\overleftrightarrow{AP}$ اور $\overleftrightarrow{BP}$ مطلوبہ دو مماس ہیں جو دیے ہوئے زاویہ MNS پر ایک دوسرے سے ملتے ہیں۔



شکل 13.3.3

13.3(iv-a) مساوی دائروں پر راست مشترک مماس کھینچنا۔



شکل 13.3.4 (a)

معلوم: مراکز O اور O' کے دو مساوی دائرے۔

ساخت کے اقدام:

1- مراکز O اور O' کو ملائیں۔

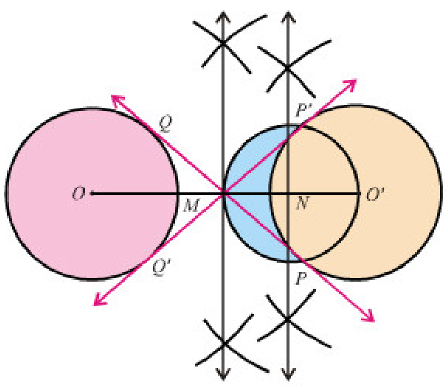
2- پہلے دائرے کا قطر AOB کھینچیں۔ تاکہ $\overline{AOB} \perp \overline{OO'}$

3- دوسرے دائرے کا قطر $A'O'B'$ کھینچیں تاکہ $\overline{A'O'B'} \perp \overline{OO'}$

4- $\overleftrightarrow{AA'}$ اور $\overleftrightarrow{BB'}$ کھینچیں جو کہ مطلوبہ مشترک مماس ہیں۔

13.3(iv-b) دو مساوی دائروں پر معکوس مشترک کھینچنا۔

معلوم: مراکز O اور O' کے دو مساوی دائرے۔



شکل 13.3.4 (b)

ساخت کے اقدام:

1- مراکز O اور O' کو ملائیں۔

2- $\overline{OO'}$ کا وسطی نقطہ M معلوم کریں۔

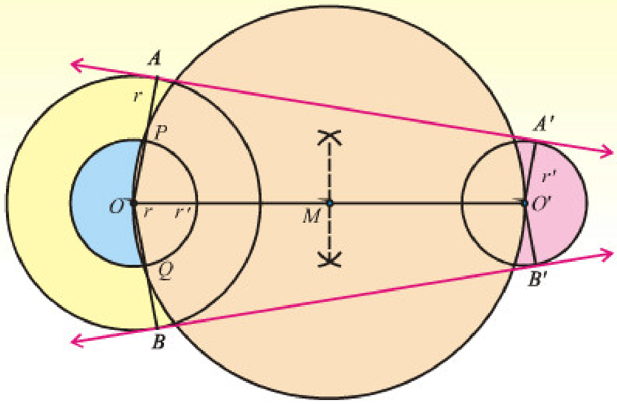
3- $\overline{MO'}$ کا وسطی نقطہ N معلوم کریں۔

4- مرکز N سے رداس $m\overline{MN}$ کا دائرہ کھینچیں جو مرکز O' کے دائرے کو نقاط P اور P' پر قطع کرے۔

5- نقاط M اور P سے گزرتا ہوا ایک خط کھینچیں جو دوسرے دائرے کو نقطہ Q پر مس کرے۔

6- نقاط M اور P' سے گزرتا ہوا ایک خط کھینچیں جو دوسرے دائرے کو نقطہ Q' پر چھوئے۔
پس $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{P'Q'}$ دیے ہوئے دائرے کے معکوس مشترک مماس ہیں۔

13.3(v-a) دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترک مماس کھینچنا۔



شکل 13.3.5 (*a*)

معلوم: دو غیر مساوی دائرے جن کے بالترتیب مراکز O، O' اور بالترتیب رداس r، r' $(r > r')$ ہیں۔

ساخت کے اقدام:

1- نقاط O اور O' کو ملائیں۔

2- قطر $\overline{OO'}$ کے درمیانی نقطہ M کو مرکز مان کر قطر OO' پر نیا دائرہ بنائیں۔

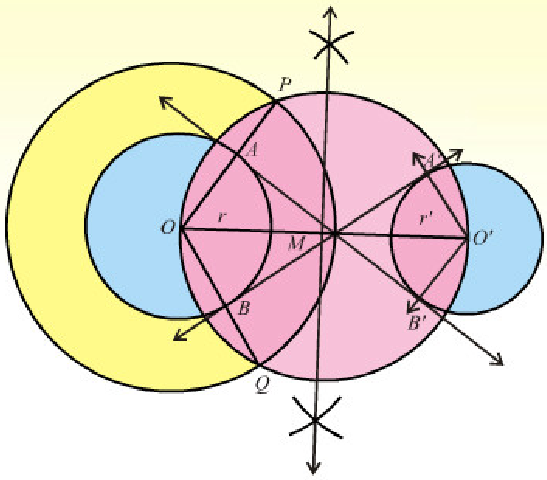
3- ایک دائرہ جس کا مرکز ایک O ہے اور مرکز O سے رداس $r - r'$ کا ایک دوسرا دائرہ کھینچیں جو قطر OO' والے دائرے کو نقاط P اور Q پر قطع کرے۔

4- قطعات $\overline{OP}$ اور $\overline{OQ}$ کو آگے بڑھائیں تاکہ مرکز O والے دائرے کو بالترتیب نقاط A اور B پر ملیں۔

5- $\overline{OA} \parallel \overrightarrow{O'A'}$ اور $\overline{OB} \parallel \overrightarrow{O'B'}$ کھینچیں۔

6- A کو A' اور B اور B' سے ملائیں۔ پس $\overleftrightarrow{AA'}$ اور $\overleftrightarrow{BB'}$ مطلوبہ راست مشترک مماس ہیں۔

(13.3(v-b دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترک مماس کھینچنا۔



شکل (13.3.5 (*b*

معلوم: دو غیر مساوی دائرے جن کے بالترتیب مراکز O، O' اور بالترتیب رداس r، r' ہیں۔

ساخت کے اقدام:

1- دیے ہوئے دائروں کے مراکز O اور O' کو ملائیں۔

2- $\overline{OO'}$ کا وسطی نقطہ M معلوم کریں۔

3- مرکز M سے قطر OO' پر ایک نیا دائرہ بنائیں۔

4- مرکز O سے رداس $r + r'$ کا ایک دوسرا دائرہ کھینچیں۔ جو قطر OO' والے دائرے کو نقاط P اور Q پر قطع کرے۔

5- O کو P اور Q سے ملائیں۔ قطعات $\overline{OP}$ اور $\overline{OQ}$ رداس r والے دائرے کو بالترتیب A اور B پر ملتے ہیں۔

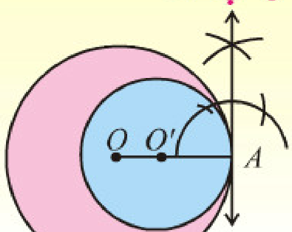
6- $\overline{OA} \parallel \overrightarrow{O'B'}$ اور $\overline{OB} \parallel \overrightarrow{O'A'}$ کھینچیں۔

7- A کو B' سے اور A' کو B سے ملائیں۔ پس $\overleftrightarrow{AB'}$ اور $\overleftrightarrow{A'B}$ مطلوبہ معکوس مشترک مماس ہیں۔

13.3(vi-a) دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں پر مماس کھینچنا۔

پہلی صورت :

معلوم: دو غیر مساوی اندرونی طور پر مَس کرتے ہوئے دائرے جن کے مراکز O اور O' ہیں۔



شکل صورت - I

ساخت کے اقدام:

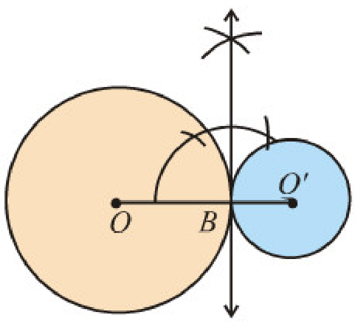
1- O اور O' کو ملائیں۔ OO' کو نقطہ A تک آگے بڑھائیں۔ جہاں دونوں دائرے ایک دوسرے کو نقطہ A پر مس کرتے ہیں۔ (شکل I)

2- مماس، $\overline{OA}$ پر عمود ہوتا ہے۔

3- نقطہ A سے $\overline{OA}$ پر عمود کھینچیں جو کہ مطلوبہ مماس ہے۔

دوسری صورت:

معلوم: دو غیر مساوی بیرونی طور پر مس کرتے ہوئے دائرے جن کے مراکز O اور O' ہیں



شکل صورت - II

13.3.6 (a)

ساخت کے اقدام:

1- O کو O' سے ملائیں۔ OO' دونوں دائروں کو نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ جہاں یہ دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ (شکل II)

2- مماس، دائروں کے مراکز سے بننے والے قطعہ خط پر عمود ہوتا ہے۔

3- نقطہ B سے $\overline{OO'}$ پر عمود کھینچیں جو کہ مطلوبہ مماس ہے۔

13.3(vi-b) دو غیر مساوی قطع کرتے ہوئے دائروں پر مماس کھینچنا۔

معلوم: دو قطع کرتے ہوئے دائرے جن کے مراکز A اور B ہیں۔

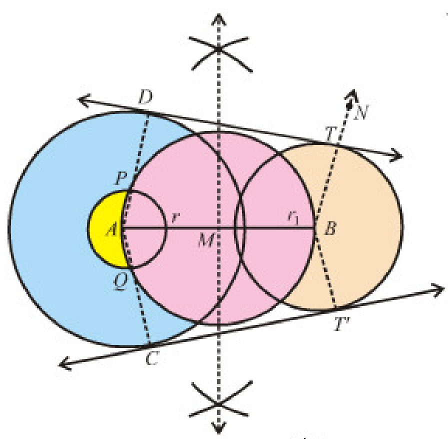
ساخت کے اقدام:

1- ایک قطعہ خط AB لیں۔

2- دو دائرے جن کے بالترتیب رداس r_1, r (جب کہ $r > r_1$) اور مراکز A، B ہوں، کھینچیں۔

3- A کو مرکز مان کر رداس $r - r_1$ کا دائرہ کھینچیں۔

4- قطعہ خط AB کی نقطہ M پر تنصیف کریں۔



شکل 13.3.6 (b)

5- مرکز M سے رداس $m\overline{AM} = m\overline{BM}$ کا دائرہ کھینچیں جو رداس $r - r_1$ والے دائرے کو نقاط P اور Q پر قطع کرے۔

6- A کو P سے ملائیں اور $\overline{AP}$ کو آگے بڑھائیں تاکہ وہ مرکز A والے دائرے کو D پر ملے۔ نیز A کو Q سے ملائیں اور $\overline{AQ}$ آگے بڑھائیں تاکہ مرکز A والے دائرے کو C پر ملے۔

7- $\overline{AD}$ کے متوازی $\overrightarrow{BN}$ کھینچیں۔ جو مرکز B والے دائرے کو T پر قطع کرے۔

8- نقاط D اور T کو ملاتا ہوا خط کھینچیں۔ $\overleftrightarrow{DT}$ دیے ہوئے دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔

9- $\overline{AB}$ کے دوسری طرف اسی عمل کو دہرائیں، $\overleftrightarrow{CT}$ بھی دیے ہوئے دونوں دائروں کا مماس ہے۔

13.3(vii-a) ایک دائرہ جو دیے ہوئے زاویہ کے بازوؤں کو مس کرتا ہو، کھینچیں۔

معلوم: $\angle BAC$ ایک زاویہ ہے۔

ساخت کے اقدام:

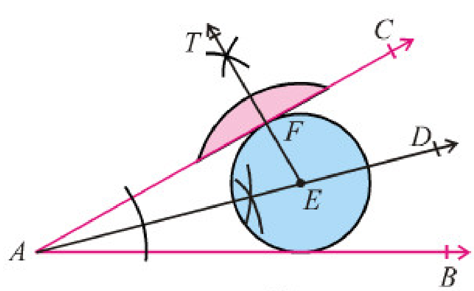
1- $\angle BAC$ کا ناصف $\overrightarrow{AD}$ کھینچیں۔

2- $\overrightarrow{AD}$ پر کوئی نقطہ E لیں۔

3- $\overrightarrow{AC}$ پر عمود $\overrightarrow{ET}$ کھینچیں جو $\overrightarrow{AC}$ کو نقطہ F پر قطع کرے۔

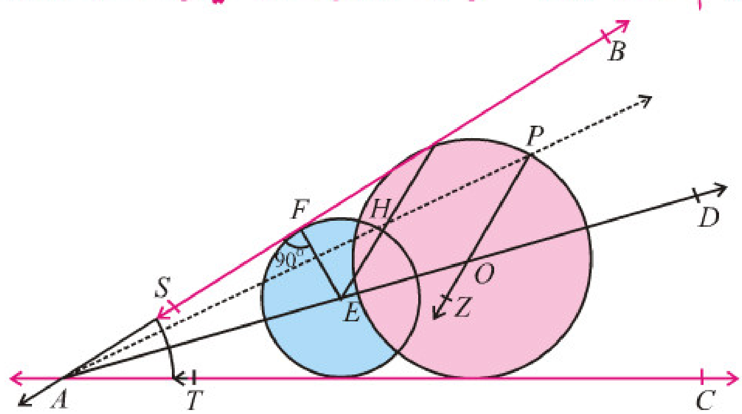
4- مرکز E سے $m\overline{EF}$ رداس کا دائرہ کھینچیں۔

یہ دائرہ $\angle BAC$ کے دونوں بازوؤں کو چھوتا ہے۔



شکل 13.3.7 (a)

13.3(vii-b) دو ہم نقطہ خطوط کو مس کرے اور ان کے درمیانی نقطہ سے گزرے۔



شکل 13.3.7 (b)

معلوم: $\overleftrightarrow{BS}$ اور $\overleftrightarrow{CT}$ دو ہم نقطہ خطوط ہیں۔

ساخت کے اقدام:

-1 $\overleftrightarrow{BS}$ اور $\overleftrightarrow{CT}$ نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

-2 $\angle BAC$ کا ناصف $\overrightarrow{AD}$ کھینچیں۔

-3 $\overrightarrow{AD}$ پر کوئی نقطہ E لیں۔

-4 $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود $\overline{EF}$ کھینچیں۔

-5 مرکز E سے رداس $m\overline{EF}$ کا دائرہ کھینچیں۔

-6 یہ دائرہ $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{AC}$ کو چھوتا ہے۔

-7 $\overrightarrow{AP}$ جو اس دائرے کو نقطہ H پر کاٹتا ہے، کھینچیں۔ نقطہ E اور نقطہ H کو ملائیں۔

-8 نقطہ P سے $\overline{HE} \parallel \overrightarrow{PZ}$ کھینچا۔ جو کہ $\overrightarrow{AD}$ کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔

-9 مرکز O سے رداس $m\overline{OP}$ کا دائرہ کھینچیں یہ دائرہ دونوں خطوط کو چھوتا ہے۔

(13.3(vii-c تین ہم نقطہ خطوط کو چھوتا ہوا دائرہ کھینچنا۔

نوٹ: تین ہم نقطہ خطوط کو چھوتا ہوا دائرہ کھینچنا ناممکن ہے۔

مشق 13.3

-1 ایک قوس ABC میں وتر $\overline{BC}$ کی لمبائی 2 سم ہے۔ قطعہ خط PBC کھینچیں جس کی لمبائی 8 سم ہے۔ جب کہ نقطہ P قوس سے باہر ہے۔ نقطہ P سے قوس پر مماس کھینچیں۔

-2 8 سم قطر کا ایک دائرہ بنائیں۔ محیط سے 5 سم کی دوری پر نقطہ C کو ظاہر کریں۔ نقطہ C سے دائرے کا مرکز استعمال کئے بغیر، مماس کھینچیں۔

-3 رداس 2 سم کا دائرہ بنائیں۔ ایک دوسرے کے ساتھ 60^o کا زاویہ بنانے والے دو مماس کھینچیں۔

-4 3 سم رداس والے دائرے کے دو عمودی مماس کھینچیں۔

-5 دو مساوی دائرے 8 سم کے فاصلہ پر ہیں۔ ان دائروں کے راست مشترک مماس کھینچیں۔

-6 2.4 سم رداس والے دو مساوی دائرے کھینچیں۔ اگر ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ 6 سم ہو تو ان کے معکوس مماس کھینچیں۔

-7 دو دائرے کھینچیں جن کے رداس 2.5 سم اور 3 سم ہیں۔ اگر ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ 6.5 سم ہو تو دو راست مشترک مماس کھینچیں۔

-8 دو دائرے کھینچیں جن کے رداس 3.5 سم اور 2 سم ہیں۔ اگر ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ 6 سم ہو تو دو معکوس مشترک مماس کھینچیں۔

-9 دو مس کرتے ہوئے دائروں کے رداس 2.5 سم اور 3.5 سم ہیں۔ ان کے دو مشترک مماس کھینچیں۔

-10 دو قطع کرتے ہوئے دائروں کے رداس 3 سم اور 4 سم ہیں۔ ان کے دو مشترک مماس کھینچیں۔

-11 دائرہ کھینچیں جو دیے گئے زاویوں کے دونوں بازوؤں کو چھوتے ہوں:

(i) 45^{o} (ii) 60^{o}

متفرق مشق 13

کثیر الانتخابی سوالات

-1 صحیح جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

(i) دائرے کا محیط کہلاتا ہے۔

(a) وتر (b) قطعہ (c) سرحد

(ii) دائرے کو قطع کرتا خط کہلاتا ہے۔

(a) مماس (b) خطِ قاطع (c) وتر

(iii) ایک دائرے کا حصہ جو ایک قوس اور دو رداسوں کے درمیان ہو، کہلاتا ہے۔

(a) قطعاع دائرہ یا سیکٹر (b) قطعہ (c) وتر

(iv) نصف دائرے میں محصور زاویہ ہوتا ہے۔

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$

(v) ایک دائرے کے قطر کی لمبائی دائرے کے رداس کے کتنے گنا ہوتی ہے؟

(a) 1 گنا (b) 2 گنا (c) 3 گنا

(vi) دائرے کا مماس اور رداس کا ایک دوسرے

(a) کے متوازی (b) پر عمود نہیں (c) پر عمود

(vii) دائرے جو تین مشترک نقاط رکھتے ہوں۔

(a) متراکب ہونا (b) ہم خطی (c) منطبق نہ ہونا

(viii) جب دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو ان کے مراکز اور ملنے والا نقطہ ہوتے ہیں۔

(a) منطبق (b) غیر ہم خطی (c) ہم خطی

(ix) ایک مسدس کے بیرونی زاویے کی مقدار ہوتی ہے۔

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{6}$

(x) اگر محصور مرکز اور محاصر مرکز منطبق ہوں تو مثلث ہوتی ہے۔

(a) مساوی الساقین (b) قائمۃ الزاویہ مثلث (c) مساوی الاضلاع

(xi) ایک منظم مثمن کے بیرونی زاویوں کی مقدار ہوتی ہے۔

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{8}$

(xii) دائرے کے قطر کے سروں پر مماس ہوتے ہیں۔

(a) متوازی (b) عمود (c) قاطع

(xiii) دو دائروں پر دو معکوس مماس کی لمبائیاں ہوتی ہیں۔

(a) غیر برابر (b) برابر (c) متراکب

(xiv) دائرے کے باہر نقطہ سے کتنے مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3

(xv) اگر دو دائروں کے مراکز کا درمیانی فاصلہ رداسوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو دائرے ہوں گے۔

(a) قطع کرتے ہیں (b) قطع نہیں کرتے

(c) ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں

(xvi) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہوں تو ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ برابر ہوتا ہے۔

(a) رداسوں کا فرق (b) رداسوں کا مجموعہ (c) رداسوں کا حاصل ضرب

(xvii) دو مس کرتے ہوئے دائروں کے کتنے مشترک مماس بنائے جاسکتے ہیں؟

(a) 2 (b) 3 (c) 4

(xviii) دو غیر متقاطع دائروں کے کتنے مشترک مماس کھینچے جاسکتے ہیں؟

(a) 2 (b) 3 (c) 4

2- دیے ہوئے سوالات کے مختصر جوابات لکھیں۔

(i) مندرجہ ذیل کی تعریف لکھیں اور اشکال بنائیں۔

(a) دائرے کا قطعہ (b) دائرے کا مماس

(c) دائرے کا سیکٹر (یا قطعاع دائرہ) (d) محصور دائرہ

(e) محاصر دائرہ (f) جانبی دائرہ

(ii) ایک منظم مثمن کے ضلع کی لمبائی 3 سم ہے۔ اس کا احاطہ معلوم کریں۔

(iii) n- ضلعی کثیر الاضلاع کے اندر موجود زاویہ معلوم کرنے کا کلیہ معلوم کریں۔

(iv) ایک منظم مخمس کے ضلع کی لمبائی 5 سم ہے اس کا احاطہ کیا ہے؟

3- خالی جگہ پُر کریں۔

(i) دائرے کی سرحد کو ____________ کہا جاتا ہے۔

(ii) دائرے کے محیط کو دائرے کی ____________ کہا جاتا ہے۔

(iii) دائرے کے دو نقاط کو ملانے والا خط ____________ کہلاتا ہے۔

(iv) دائرے کے دو غیر متوازی وتروں کے عمودی ناصف کے نقطہ تقاطع کو ____________ کہا جاتا ہے۔

(v) دائرے جن کے تین نقاط مشترک ہوں تو وہ ____________ ہونگے۔

(vi) نقطہ جو دائرے کے اندر ہو۔ اس کا مرکز سے فاصلہ رداس سے ____________ ہوتا ہے۔

(vii) نقطہ جو دائرے کے باہر ہو۔ اس کا مرکز سے فاصلہ رداس سے ____________ ہوتا ہے۔

(viii) دائرے کا صرف ____________ مرکز ہوتا ہے۔

(ix) صرف اور صرف ایک دائرہ تین ____________ نقاط سے کھینچا جاسکتا ہے۔

(x) نصف دائرہ میں محصور زاویہ ____________ زاویہ ہوتا ہے۔

(xi) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو نقطہ ____________ اور ____________ ہم خط ہوتے ہیں۔

(xii) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو ان کا نقطہ تماس اور مراکز ____________ ہوتے ہیں۔

(xiii) دائرے سے باہر نقطہ سے ____________ مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

(xiv) مماس، نقطہ تماس سے دائرے کے رداس پر ____________ ہوتا ہے۔

(xv) سیدھا خط جو دائرے کے رداس پر عمود ہو تو وہ دائرے کا ____________ کہلاتا ہے۔

(xvi) دو دائرے ایک دوسرے کو ____________ نقاط سے زیادہ پر نہیں کاٹتے۔

(xvii) ایک دائرے کے وتر کا عمودی ناصف ____________ سے گزرتا ہے۔

(xviii) دو دائروں کے راست مشترک مماسوں کی لمبائی ایک دوسرے کے ____________ ہوتی ہے۔

(xix) دو دائروں کے معکوس مشترک مماسوں کی لمبائی ایک دوسرے کے ____________ ہوتی ہے۔

(xx) اگر مثلث کا محصور مرکز اور محاصر مرکز منطبق ہوتے ہوں تو مثلث __________ ہوتی ہے۔

(xxi) دو متقاطع دائرے __________ نہیں ہوتے۔

(xxii) محصور دائرے کا مرکز __________ کہلاتا ہے۔

(xxiii) محاصر دائرے کا مرکز __________ کہلاتا ہے۔

(xxiv) محصور دائرے کا رداس __________ کہلاتا ہے۔

(xxv) محاصر دائرے کا رداس __________ کہلاتا ہے۔

خلاصہ

- کسی رداس کا دائرہ، پرکار کو کسی معین نقطے پر گھمانے سے ٹریس (Trace) کیا جاسکتا ہے۔
- دائرے کے دو غیر متوازی وتروں کے عمودی ناصف جس نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ وہ نقطہ دائرے کا مرکز ہوتا ہے۔
- دیے ہوئے تین غیر ہم خط نقاط سے دائرہ کھینچا جاسکتا ہے۔
- جب دائرے کے محیط کا ایک حصہ دیا ہوا ہو تو اس دائرے کو مکمل کیا جاسکتا ہے۔
- اگر مثلث دی ہوئی ہو تو محاصر دائرہ، محصور دائرہ اور ہر راس کے مقابل جانبی دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔
- اگر ایک دائرہ دیا ہوا ہو تو محاصر اور محصور مساوی الاضلاع مثلثیں بنائی جاسکتی ہیں۔
- دیے ہوئے دائرے کے لیے محاصر اور محصور مربعے بنائے جاسکتے ہیں۔
- دیے ہوئے دائرے کے لیے محاصر اور محصور منظم مسدس بنائی جاسکتی ہیں۔
- ہم کسی دی ہوئی قوس کے لیے اس کے درمیانی نقطہ، اس کے کسی آخری نقطہ اور وہ نقطہ جو اس پر نہ ہو، مماس کھینچ سکتے ہیں۔
- دیے ہوئے دائرے کے محیط پر نقطہ ہو یا نقطہ دائرے کے باہر ہو، مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔
- دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں کا مماس ٹریس (Trace) کیا جاسکتا ہے۔
- دو مساوی دائروں یا دو غیر مساوی دائروں کے راست یا معکوس مشترک مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔
- ہم دیے ہوئے زاویہ کے بازوؤں کو مس کرتا ہوا دائرہ بنا سکتے ہیں۔
- ہم، دو ہم نقطہ خطوط کے درمیانی نقطہ سے گزرتے ہوئے اور ان خطوط کو مس کرتے ہوئے دائرے کو ٹریس (Trace) کر سکتے ہیں۔

جوابات

یونٹ 1: دودرجی مساواتیں

مشق 1.1

1. (i) دودرجی, $x^2 + 4x - 14 = 0$ (ii) دودرجی, $7x^2 - 3x + 7 = 0$
(iii) دودرجی, $4x^2 + 4x - 1 = 0$ (iv) پیور, $x^2 - 1 = 0$
(v) پیور, $x^2 - 20 = 0$ (vi) دودرجی, $x^2 + 29x + 66 = 0$

2. (i) $\{-4, 5\}$ (ii) $\left\{0, \frac{-5}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-2, \frac{2}{17}\right\}$
(iv) $\{-8, 19\}$ (v) $\{3, -4\}$ (vi) $\left\{\frac{3}{2}, 5\right\}$

3. (i) $\left\{\frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{7}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{-2 \pm \sqrt{a^2 + 4}}{a}\right\}$ (iii) $\left\{3, \frac{1}{11}\right\}$
(iv) $\left\{\frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4ln}}{2l}\right\}$ (v) $\left\{0, \frac{-7}{3}\right\}$ (vi) $\{-13, 15\}$
(vii) $\left\{-5, \frac{3}{2}\right\}$ (viii) $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{33}{2}\right\}$ (ix) $\{1,3\}$
(x) $\{-3a, 4a\}$

مشق 1.2

1. (i) $\left\{\frac{-7 \pm \sqrt{57}}{2}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{-4 \pm \sqrt{11}}{5}\right\}$ (iii) $\left\{\sqrt{3}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right\}$
(iv) $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{233}}{8}\right\}$ (v) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ (vi) $\left\{\frac{-4 \pm \sqrt{10}}{3}\right\}$
(vii) $\{3,7\}$ (viii) $\left\{3, \frac{-4}{5}\right\}$
(ix) $\left\{(a+b), \frac{1}{2}(a+b)\right\}$ (x) $\left\{1, \frac{l+m}{l}\right\}$

مشق 1.3

1. $\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{5}\right\}$ 2. $\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 2\right\}$ 3. $\left\{\frac{16}{625}, 1\right\}$
4. $\{216, 729\}$ 5. $\left\{\frac{3}{5}, 1\right\}$ 6. $\{-1, 0, 1\}$

7.	$\{6\}$	8.	$\left\{\pm\frac{5}{4}\right\}$	9.	$\left\{-7a, \frac{a}{7}\right\}$
10.	$\{\pm1, 1\pm\sqrt{2}\}$	11.	$\left\{1, -2, -\frac{1}{2}\right\}$	12.	$\{-3,0\}$
13.	$\{0, -1\}$	14.	$\{2,4\}$	15.	$\{1, 3, 2\pm\sqrt{33}\}$
16.	$\{-4,-2,5,7\}$				

مشق 1.4

1.	$\left\{-1, -\frac{9}{4}\right\}$	2.	$\{1\}$, ($\frac{-2}{9}$ فالتوروٹ)	3.	$\left\{\frac{5}{16}\right\}$, ($-1$ فالتوروٹ)
4.	$\{7\}$, (-12 فالتوروٹ)	5.	$\{4\}$	6.	$\{3\}$
7.	ϕ یا $\{\ \}$	8.	$\{0\}$, ($-3a$ فالتوروٹ)	9.	$\left\{\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}\right\}$
10.	$\left\{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$	11.	$\{-3, 0\}$		

متفرق مشق 1

.1 کثیر الانتخابی سوالات:

(i) (*b*) (ii) (*c*) (iii) (*c*) (iv) (*a*)
(v) (*c*) (vi) (*b*) (vii) (*a*) (viii) (*c*)
(ix) (*a*)

.2 مختصر جوابات:

(i) $-1\pm\sqrt{3}$ (ii) 0, 3 (iii) $3x^2 - 2x - 48 = 0$
(iv) (a) تجزی (b) تکمیل مربع (c) دو درجی کلیہ (v) $\frac{-1}{2}$, 1 (vi) -3, 6

.3 خالی جگہ پُر کریں۔

(i) $ax^2 + bx + c = 0$ (ii) 3 (iii) تکمیل مربع
(iv) $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (v) $\left\{\pm\frac{1}{5}\right\}$ (vi) قوت نما
(vii) $\{\pm 3\}$ (viii) معکوس (ix) فالتوروٹ
(x) جذری علامت

یونٹ 2: دو درجی مساواتوں کا نظریہ

مشق 2.1

1. (i) 17 (ii) -8 (iii) 0 (iv) 81

2. (i) حقیقی، ناطق اور نابرابر, $x = 8, 15$ (ii) خیالی, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{-47}}{4}$

(iii) حقیقی اور برابر, $x = \frac{3}{4}$ (iv) حقیقی، غیر ناطق اور نابرابر, $x = \frac{-7 \pm \sqrt{205}}{6}$

3. $k = -\frac{1}{3}, 1$ 4. (i) $k = 2, \frac{2}{3}$ (ii) $k = -1, 0$ (iii) $k = 1$

6. $a = mc$

مشق 2.2

1. (i) $-1, -\omega, -\omega^2$ (ii) $2, 2\omega, 2\omega^2$

(iii) $-3, -3\omega, -3\omega^2$ (iv) $4, 4\omega, 4\omega^2$

2. (i) 128 (ii) 1024 (iii) 125 (iv) 24

(v) 128 (vi) 2 (vii) -6 (viii) -1

مشق 2.3

1. (i) $S = 5, P = 3$ (ii) $S = -\frac{7}{3}, P = \frac{-11}{3}$

(iii) $S = \frac{q}{p}, P = \frac{r}{p}$ (iv) $S = \frac{a}{a+b}, P = \frac{b}{a+b}$

(v) $S = -\frac{m+n}{l+m}, P = \frac{n-l}{l+m}$ (vi) $S = \frac{5m}{7}, P = \frac{9n}{7}$

2. (i) $k = \frac{3}{8}$ (ii) $k = \frac{2}{3}$

3. (i) $k = \frac{64}{23}$ (ii) $k = -1, 2$

4. (i) $p = 0$ (ii) $p = \frac{13}{4}$

5. (i) $m = -55$ (ii) $m = 5$ (iii) $m = -\frac{10}{7}$

6. (i) $m = \frac{3}{2}$ (ii) $m = 1$

مشق 2.4

1. (i) $p^2 - 2q$ (ii) $q\,(p^2 - 2q)$ (iii) $\frac{1}{q}\,(p^2 - 2q)$
2. (i) $\frac{5}{6}$ (ii) $\frac{9}{4}$ (iii) $\frac{5}{9}$ (iv) $-\frac{235}{96}$
3. (i) $\frac{-mn^2}{l^3}$ (ii) $\frac{1}{n^2}\,[m^2 - 2ln]$

مشق 2.5

1. (a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (b) $x^2 - 13x + 36 = 0$
   (c) $x^2 - x - 6 = 0$ (d) $x^2 + 3x = 0$
   (e) $x^2 + 4x - 12 = 0$ (f) $x^2 + 8x + 7 = 0$
   (g) $x^2 - 2x + 2 = 0$ (*h*) $x^2 - 6x + 7 = 0$
2. (a) $x^2 - 8x + 31 = 0$ (b) $x^2 + 3x + 36 = 0$
   (c) $6x^2 - 3x + 1 = 0$ (d) $2x^2 + x + 2 = 0$
   (e) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
3. (a) $x^2 - (p^2 - 2q)\,x + q^2 = 0$ (b) $qx^2 - (p^2 - 2q)\,x + q = 0$

مشق 2.6

1. (i) $Q(x) = x + 6\ ;\ R = -7$ (ii) $Q(x) = 4x^2 - 12x + 31\ ;\ R = -78$
   (iii) $Q(x) = x^2 + 3x + 3\ ;\ R = 8$
2. (i) $h = \frac{7}{3}$ (ii) $h = 6$ (iii) $h = -5$
3. (i) $l = -\frac{3}{2},\ m = -18$ (ii) $l = 2\ ,\ m = -\frac{1}{2}$
4. (i) $-6, 2, 4$ (ii) $-2, \frac{1}{2}, 3$ (iii) $\frac{-3}{4}, -1, 2$
5. (i) $-3, -1, 1, 3$ (ii) $-4, -2, 1, 3$

مشق 2.7

1. $\{(4, 1), (-6, 11)\}$
2. $\{(1, 1), (-5, -8)\}$
3. $\left\{(2, -5), \left(\frac{7}{2}, \frac{-7}{2}\right)\right\}$
4. $\left\{(a, -b), \left(\frac{a-b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)\right\}$
5. $\{(-3, 2), (-1, -2)\}$
6. $\{(0, 1), (-3, -2)\}$
7. $\{(\pm 2, \pm 3)\}$
8. $\{(\pm 2, \pm\sqrt{2})\}$

9. $\{(\pm 1, \pm 1)\}$

10. $\left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right), \left(\frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right), (1, 1), (-1, -1)\right\}$

11. $\left\{(3, 1), (-3, -1), \left(\frac{-4\sqrt{6}}{3}, \sqrt{6}\right), \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}, -\sqrt{6}\right)\right\}$

12. $\left\{\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-5}{2\sqrt{2}}, \frac{-3}{2\sqrt{2}}\right)\right\}$

13. $\left\{\left(\frac{7}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-7}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

مشق 2.8

1.	13, 14	2.	4, 5, 6.	3.	12
4.	$\frac{-1}{12}, 2$	5.	$4, -\frac{1}{4}$	6.	81
7.	(3, 6), (6, 3)	8.	$x = 5, y = 4$	9.	11, 7

10. 25 سم by 15 سم یا 15 سم by 25 سم

متفرق مشق 2

.1 کثیر الانتخابی سوالات:

(i) (c)	(ii) (b)	(iii) (b)	(iv) (a)
(v) (a)	(vi) (b)	(vii) (c)	(viii) (c)
(ix) (d)	(x) (c)	(xi) (a)	(xii) (a)
(xiii) (c)	(xiv) (d)	(xv) (d)	(xvi) (a)

.2 مختصر جوابات

(i) (*a*) خیالی (*b*) ناطق (حقیقی) نابرابر

(c) غیر ناطق (حقیقی)، نابرابر (d) ناطق (حقیقی)، برابر

(ii) $w^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (iv) 1

(vi) 0 (vii) 64 (viii) $x^2 + 3x + 9 = 0$

(ix) $Q(x) = x^2 + 5x + 10, \ R = 22$ (xi) مجموعہ $= -\frac{3q}{2p}$, حاصل ضرب $= -\frac{2r}{p}$

(xii) $\frac{10}{9}$ (xiii) (a) $\frac{-39}{16}$ (b) $-\frac{13}{8}$ (c) $\frac{\sqrt{-87}}{4}$

(xiv) (a) $x^2 + 5x + 7 = 0$ (b) $x^2 - 10x + 28 = 0$

3. خالی جگہ پر کریں۔

(i) b^2-4ac (ii) برابر (iii) حقیقی (iv) خیالی
(v) ناطق (vi) غیر ناطق (vii) $-\frac{b}{a}$ (viii) $\frac{c}{a}$
(ix) $\frac{5}{7}$ (x) $\frac{-9}{5}$ (xi) $\frac{1}{\alpha\beta}$ (xii) $1, w, w^2$
(xiii) صفر (xiv) w^2 (xv) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
(xvi) $x^2+2x+4=0$

یونٹ 3: تغیرات

مشق 3.1

1. (i) $3:5;\frac{3}{5}$ (ii) $3:2;\frac{3}{2}$ (iii) $16:11;\frac{16}{11}$
   (iv) $11:24;\frac{11}{24}$ (v) $1:3;\frac{1}{3}$
2. (i) $7:12$ (ii) $7:5$
3. $4:5$ 4. $p=8$ 5. $x=1$ 6. $x=3$; 15 اور 24
7. $x=2$; 8 اور 26 8. 400 روپے 9. $51:7$
10. (i) 7 (ii) $9bx$ (iii) $4l$
11. (i) $x=2$ (ii) $x=1$ (iii) $x=38$
    (iv) $x=p^2-q^2$ (v) $x=4$

مشق 3.2

1. (i) $y=4x$ (ii) $y=20$ (iii) $x=7$
2. (i) $y=\frac{7}{3}x$ (ii) $x=15, y=42$
3. $R=\frac{5}{8}T$, $R=40$, $T=32$ 4. $R=32$ 5. $V=\frac{5}{27}R^3$, $R=15$
6. $w=3u^3$, $w=375$ 7. $y=\frac{14}{x}$, $y=\frac{1}{9}$ 8. $y=\frac{12}{x}$, $x=\frac{1}{2}$
9. $w=\frac{35}{z}$, $w=\frac{4}{5}$ 10. $A=\frac{18}{r^2}$, $r=\pm\frac{1}{2}$ 11. $a=\frac{48}{b^2}$, $a=\frac{3}{4}$
12. $V=\frac{135}{r^3}$, $V=\frac{5}{8}$, $r=\frac{3}{4}$ 13. $m=\frac{128}{n^3}$, $m=\frac{16}{27}$, $n=\frac{2}{3}$

مشق 3.3

1. (i) 24 (ii) $9a$ (iii) $\frac{a-b}{a+b}$

   (iv) $(x^2+xy+y^2)^2$ (v) $(x-2y)^2$ (vi) $\frac{p-q}{p^2-pq+q^2}$

2. (i) 24 (ii) $9x^4$ (iii) $14b^2$

   (iv) $5x^3$ (v) $p-q$ (vi) p^2-pq+q^2

3. (i) ± 30 (ii) $\pm 10x^5y^3$ (iii) $\pm 45p^2q^3r^5$

   (iv) $\pm(x-y)$

4. (i) $p=\pm 15$ (ii) $x=\pm 12$ (iii) $p=8, -4$

   (iv) $m=17, -11$

مشق 3.4

2. (i) 2 (ii) 2 (iii) $\frac{4(b-a)}{a+b}$ (iv) $\frac{2(z^2-y^2)}{yz}$

   (v) 2 (vi) $\left\{\frac{9}{2}, \frac{11}{3}\right\}$ (vii) $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ (extraneous root), ϕ or $\{\ \}$

   (viii) $\{2p, -2p\}$ (ix) $\{7\}$

مشق 3.5

1. $s=\frac{14u^2}{9v}, \frac{28}{5}$ 2. $w=\frac{1}{36}xy^2z, \frac{49}{3}$ 3. $y=\frac{3x^3}{z^2t}, \frac{2}{3}$

4. $u=\frac{7x^2}{4yz^3}, \frac{21}{8}$ 5. $v=\frac{7xy^3}{8z^2}, \frac{14}{3}$ 6. $w=\frac{135}{u^3}, \frac{5}{8}$

مشق 3.7

1. (i) $A=48$ مربع یونٹس (ii) $l=2$
2. $S=4\pi r^2$, $r=3$
3. (i) $S=2.5$ انچ (ii) $F=16$ پونڈ
4. $I=45$ کینڈل پاور 5. $d=20$ فٹ 6. 297000 روپے
7. $l=20$ فٹ 8. $p=12$ ہارس پاور 9. 968000

متفرق مشق 3

.1 کثیر الانتخابی سوالات۔

(i)	(b)	(ii)	(c)	(iii)	(b)	(iv)	(a)
(v)	(c)	(vi)	(a)	(vii)	(d)	(viii)	(b)
(ix)	(a)	(x)	(a)	(xi)	(c)	(xii)	(b)
(xiii)	(a)	(xiv)	(d)	(xv)	(a)		

.2 مختصر جوابات۔

(vi)	$x = 10$	(vii)	$y = \pm\frac{4}{3}$	(viii)	$v = 2$
(ix)	$\frac{21}{4}$	(x)	± 28	(xi)	$\frac{4}{7}$
(xii)	$y = \frac{8x^2}{7z}$	(xiii)	$z = 6xy$	(xiv)	$\frac{18}{v^2}$

.3 خالی جگہ پر کریں۔

(i)	$\frac{x+y}{x-y}$	(ii)	پہلی رقم	(iii)	دوسری رقم
(iv)	طرفین	(v)	وسطین	(vi)	$p = 14$
(vii)	$m = 8$	(viii)	ky	(ix)	$\frac{v}{k}$
(x)	p^2w	(xi)	$\frac{4}{3}$	(xii)	2
(xiii)	$\pm 2mn^2p^3$	(xiv)	$m = \pm 6$		

یونٹ 4: جزوی کسریں

مشق 4.1

1. $\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-3}$
2. $\frac{-1}{x-4} + \frac{2}{x+3}$
3. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$
4. $\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+3}$
5. $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$
6. $\frac{3}{x-4} + \frac{4}{x-3}$
7. $1 + \frac{9}{5(x-2)} - \frac{4}{5(x+3)}$
8. $2x + 3 + \frac{5}{3x+1} + \frac{1}{x-1}$

مشق 4.2

1. $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-2}$
2. $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+3}$

3. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$

4. $x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$

5. $\frac{-6}{3x+2}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

6. $\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}$

7. $3+\frac{3}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}$

8. $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}$

مشق 4.3

1. $\frac{-2}{x+3}+\frac{2x-3}{x^2+1}$

2. $\frac{x+12}{5(x^2+1)}-\frac{1}{5(x+3)}$

3. $\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(1+x^2)}$

4. $\frac{17x-6}{5(x^2+1)}-\frac{17}{5(x+3)}$

5. $\frac{-2}{13(x+3)}+\frac{2x+33}{13(x^2+4)}$

6. $\frac{1}{2(x+2)}+\frac{x-2}{2(x^2+4)}$

7. $\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$

8. $\frac{2}{3(x+1)}+\frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$

مشق 4.4

1. $\frac{x}{x^2+4}-\frac{4x}{(x^2+4)^2}$

2. $\frac{1}{(x+1)}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$

3. $\frac{1}{4(1+x)}-\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{x-1}{2(x^2+1)^2}$

4. $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{x+1}{4(x^2+1)}+\frac{x+1}{2(1+x^2)^2}$

5. $1-\frac{4}{x^2+2}+\frac{4}{(x^2+2)^2}$

6. $x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$

متفرق مشق 4

1. (i) (c) (ii) (c) (iii) (b) (iv) (d) (v) (c)
(vi) (c) (vii) (b) (viii) (a) (ix) (b) (x) (c)

2. (v) $\frac{-4}{x+2}+\frac{5}{x+3}$ (vi) $\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$
(vii) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ (viii) $\frac{1}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$
(ix) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}\right]$ (x) ہاں، ایک مماثلت ہے۔

یونٹ 5: سیٹ اور تفاعل

مشق 5.1

1. (i) $\{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$ (ii) $\{4, 9\}$ (iii) $\{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$
   (iv) $\{4, 9\}$
2. (i) $Y \cup \{13, 17\}$ (ii) $Y \cup \{13, 17\}$ (iii) $\{2, 3, 5, 7, 11\}$
   (iv) $\{2, 3, 5, 7, 11\}$
3. (i) $Y \cup \{13, 17\}$ (ii) T (iii) Y
   (iv) Φ (v) Φ (vi) T
4. (i) $\{18, 20, 21, 22, 24, 25\}$ (ii) $\{18, 20, 21, 22, 24, 25\}$
   (iii) $\{4, 5, \cdots, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \cdots, 25\}$
   (iv) $\{4, 5, \cdots, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \cdots, 25\}$
5. (i) $\{2, 6, 10, 14, 18\}$ (ii) $\{24\}$
6. (i) Φ (ii) $\{0\}$

مشق 5.2

1. (i) $\{0, 1, 2, 3, \cdots, 20, 23\}$ (ii) $\{0, 1, 2, 3, \cdots, 20, 23\}$ (iii) Φ
   (iv) Φ (v) $\{1, 2, 3, 5, 7, \cdots, 19\}$
   (vi) $\{1, 2, 3, 5, 7, \cdots, 19\}$ (vii) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
   (viii) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

مشق 5.4

1. $A \times B = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$
   $B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$
2. $A \times B = \{(0, -1), (0, 3), (2, -1), (2, 3), (4, -1), (4, 3)\}$
   $B \times A = \{(-1, 0), (-1, 2), (-1, 4), (3, 0), (3, 2), (3, 4)\}$
   $A \times A = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (4, 0), (4, 2), (4, 4)\}$
   $B \times B = \{(-1, -1), (-1, 3), (3, -1), (3, 3)\}$

3. (i) $a = 6, \quad b = 3$ (ii) $a = 1, \quad b = 7$ (iii) $a = \frac{10}{3}, \quad b = -6$

4. $X = \{a, b, c, d\}; \quad Y = \{a\}$

5. (i) 6 (ii) 6 (iii) 9

مشق 5.5

1. $R_1 = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3)\}$

   $R_2 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 4)\}$

   $R_3 = \{(3, a), (4, a)\}$

   $R_4 = \{(3, b), (4, b), (3, c), (4, c)\}$

2. $R_1 = \{(-2, -2), (-2, 1), (1, 2), (2, 2)\},$

   ڈومین $R_1 = \{-2, 1, 2\} = \text{L},$ رینج $R_1 = \{-2, 1, 2\}$

   $R_2 = \{(-2, 1), (1, 1), (-2, 2)\};$

   ڈومین $R_2 = \{-2, 1\},$ رینج $R_2 = \{1, 2\}$

3. $R_1 = \{(a, a), (a, b)$; $R_2 = \{(b, c), (c, c)\}$

   $R_1 = \{(a, d), (b, g)\}$; $R_2 = \{(a, f), (b, e), (c, f)\}$

   $R_1 = \{(d, e), (d, f)\}$; $R_2 = \{(e, e), (f, f), (g, g)\}$

4. $2^{5\times5} = 2^{25}$

5. (i) $R_1 = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (4, 3), (5, 3)\}$

   (ii) $R_2 = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

   (iii) $R_3 = \{(1, 5), (3, 3), (4, 2)\}$

   (iv) $R_4 = \{(1, 3), (3, 5), (5, 7)\}$

6. (i) بائی جیکٹیو تفاعل

   ڈومین $R_1 = \{1, 2, 3, 4\},$ رینج $R_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

   (ii) ربط

   ڈومین $R_2 = \{1, 2, 3\},$ رینج $R_2 = \{1, 2, 4, 5\}$

   (iii) آن ٹو تفاعل

   ڈومین $R_3 = \{\text{b, c, d}\},$ رینج $R_3 = \{\text{a}\}$

(iv) آن ٹو تفاعل

ڈومین $R_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, رینج $R_4 = \{1, 3, 4\}$

(v) بائی جیکٹیو تفاعل

ڈومین $R_5 = \{a, b, c, d\}$, رینج $R_5 = \{a, b, d, e\}$

(vi) ربط

ڈومین $R_6 = \{1, 2, 3\}$, رینج $R_6 = \{2, 3, 4\}$

(vii) ون۔ون اِن ٹو تفاعل

ڈومین $R_7 = \{1, 3, 5\}$, رینج $R_7 = \{p, r, s\}$

(viii) ربط

ڈومین $R_8 = \{1, 3, 7\}$, رینج $R_8 = \{a, b, c\}$

متفرق مشق 5

1. کثیر الانتخابی سوالات۔

(i)	(c)	(ii)	(d)	(iii)	(c)	(iv)	(b)	(v)	(d)
(vi)	(c)	(vii)	(d)	(viii)	(c)	(ix)	(b)	(x)	(a)
(xi)	(c)	(xii)	(a)	(xiii)	(a)	(xiv)	(d)	(xv)	(c)
(xvi)	(b)	(xvii	(b)	(xviii	(c)	(xix)	(b)	(xx)	(c)

2. مختصر جوابات۔

(i) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A تحتی سیٹ ہے B کا

(ii) $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

(x) (i) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

3. خالی جگہ پُر کریں۔

(i)	B	(ii)	غیر متراکب	(iii)	$A = B$
(iv)	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	(v)	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$		
(vi)	ϕ	(vii)	U	(viii)	ϕ
(ix)	U	(x)	$A \setminus B$	(xi)	تیسرا ربع
(xii)	چوتھا ربع	(xiii)	صفر	(xiv)	صفر

(xv) $\{a, b, c\}$ (xvi) $\{a, b, c\}$ (xvii) جان وین
(xviii) ثنائی ربط (xix) آن ٹو (xx) نہیں

یونٹ 6: بنیادی شماریات

مشق 6.1

4.

جماعتی وقفہ	2—3	4—5	6—7	8—9	10—11	12—13	14—15
تعددی تقسیم	2	1	9	5	6	5	3

a) 6 — 7 b) 4 — 5

مشق 6.2

3. (i) 24.5 (ii) 290

4. (i) 24.5 (ii) 290

5. 32.5

6. A.M= 9.620 G.M=8.553 H.M = 8.089

7. عادہ=9 وسطانیہ=7

8. عادہ = 2 وسطانیہ = 2

9. اوسط = 10.478 وسطانیہ = 10.625 عادہ = 13.5

10. (i) نمبر 74 = اوسط اوزان (ii) نمبر 72.8= اوسط

11. روپے فی لٹر 41.15 = اوسط اوزان

12.

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
-------	113.33	126	142.66	159.33	178	195.33	208.67	220	-------

مشق 6.3

4. سعت = 3500 S.D. = 1585.244

5. a- (i) S.D. = 4.87 (ii) S.D. = 3.87 b- تغیریت = 6.85

6. اوسط = 27.0935 S.D. =3.136

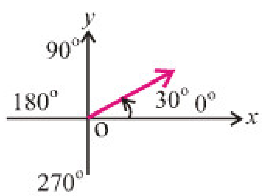
7. سعت = 43

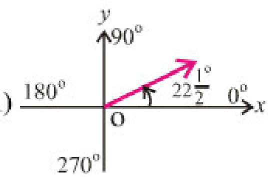
متفرق مشق 6

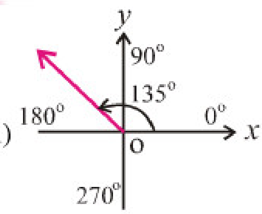
1. (i) (b) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c) (v) (b)
(vi) (a) (vii) (a) (viii) (a) (ix) (b) (x) (c)
(xi) (b) (xii) (a) (xiii) (c) (xiv) (c) (xv) (a)
(xvi) (a) (xvii) (b) (xviii) (b) (xix) (a) (xx) (b)
(xxi) (a) (xxii) (c)

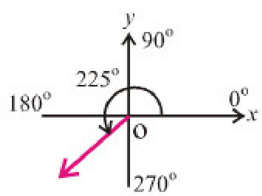
یونٹ 7: جیومیٹری کا تعارف

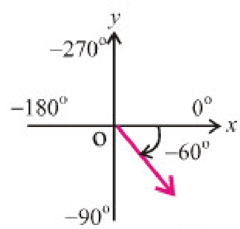
مشق 7.1

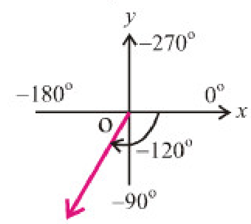
1. (i) 

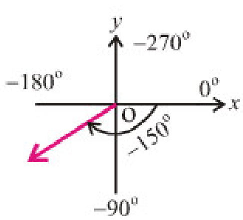
(ii) 

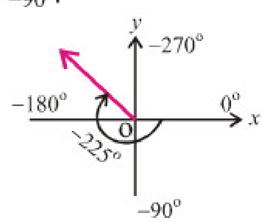
(iii) 

(iv) 

(v) 

(vi) 

(vii) 

(viii) 

2. (i) 45.5° (ii) 60.5083° (iii) 125.3805°
3. (i) $47^{\circ}21'36''$ (ii) $125^{\circ}27'$ (iii) $225^{\circ}45'$ (iv) $-22^{\circ}30'$ (v) $-67^{\circ}34'48''$
(vi) $315^{\circ}10'48''$
4. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) $\frac{5\pi}{4}$ (v) $\frac{-5\pi}{6}$
(vi) $\frac{-5\pi}{4}$ (vii) $\frac{5\pi}{3}$ (viii) $\frac{7\pi}{4}$
5. (i) 135° (ii) 150° (iii) 157.5° (iv) 146.25° (v) 171.8869°

(vi) 257.83^o (vii) -157.5^o (viii) -146.25^o

مشق 7.2

1. (i) 0.57 ریڈین (ii) 1.8 ریڈین 2. (i) 15.4 سم (ii) 15.84 ملی میٹر

3. (i) 16 سم (ii) 66.21 سم 4. 18 میٹر 5. 220 میٹر

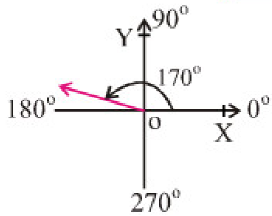
6. $\frac{\pi}{2}$ ریڈین 7. 12.57 سم 8. 105.56 مربع سم

9.(a) 18.85 مربع سم (b) 157.08 مربع سم 10. $\frac{49\pi}{18}$ مربع میٹر یا 8.55 مربع میٹر

11. 2972.39 مربع سم 12. 31.42 مربع سم 13. 5 ریڈین

مشق 7.3

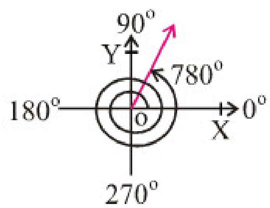
1. (i)



مثبت ہم بازو زاویہ $360^o + 170^o = 530^o$

منفی ہم بازو زاویہ -190^o

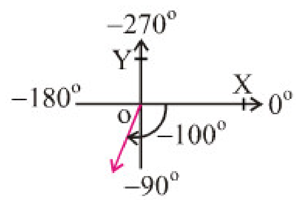
(ii)



مثبت ہم بازو زاویہ 60^o

منفی ہم بازو زاویہ -300^o

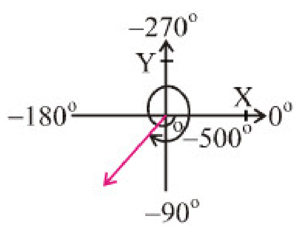
(iii)



مثبت ہم بازو زاویہ 260^o

منفی ہم بازو زاویہ $-360^o - 100^o = -460^o$

(iv)



مثبت ہم بازو زاویہ 220^o

منفی ہم بازو زاویہ -140^o

2. (i) $90^o, 180^o$ (ii) $270^o, 360^o$ (iii) $540^o, 630^o$ (iv) $0^o, 90^o$

3. (i) $0, \frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{\pi}{2}, \pi$ (iii) $0, \frac{-\pi}{2}$ (iv) $\frac{-\pi}{2}, -\pi$

4. (i) II (ii) III (iii) IV (iv) II (v) I (vi) III

5. (i) $+ve$ (ii) $-ve$ (iii) $-ve$ (iv) $-ve$ (v) $+ve$ (vi) $-ve$

6. (i) II, $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{13}}$; $\sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$; $\tan\theta = \frac{-3}{2}$; $\cot\theta = \frac{-2}{3}$

(ii) III, $\sin\theta = \frac{-4}{5}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{-5}{4}$; $\cos\theta = \frac{-3}{5}$; $\sec\theta = \frac{-5}{3}$; $\tan\theta = \frac{4}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{4}$

(iii) I, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$; $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sec\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cot\theta = \sqrt{2}$

7. $\sec\theta = \frac{-3}{2}$; $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$ or $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\tan\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$; $\cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

8. $\sin\theta = \frac{-4}{5}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{-5}{4}$; $\cos\theta = \frac{-3}{5}$; $\sec\theta = \frac{-5}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{4}$

9. $\tan\theta = -1$; $\sec\theta = \sqrt{2}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\sqrt{2}$

10. $\sin\theta = \frac{12}{13}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{12}{5}$; $\cot\theta = \frac{5}{12}$

11. (i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{4}{\sqrt{7}}$; $\cos\theta = \frac{3}{4}$; $\sec\theta = \frac{4}{3}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$

(ii) $\sin\theta = \frac{8}{17}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{17}{8}$; $\cos\theta = \frac{15}{17}$; $\sec\theta = \frac{17}{15}$; $\tan\theta = \frac{8}{15}$; $\cot\theta = \frac{15}{8}$

(iii) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{7}{2\sqrt{10}}$; $\cos\theta = \frac{3}{7}$; $\sec\theta = \frac{7}{3}$; $\tan\theta = \frac{2\sqrt{10}}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{2\sqrt{10}}$

12. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iv) 1 (v) $\frac{-1}{2}$ (vi) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (vii) 0 (viii) 0

(ix) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (x) $\frac{-1}{2}$ (xi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (xii) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

مشق 7.4

1.	$\tan^2 x$	2.	$\tan^2 x$	3.	$\sin x$	4.	$\sin^2 x$
5.	$\tan^2 x$	6.	$\cos^2 x$				

مشق 7.5

1. 59.74° 2. 18.652 میٹر 3. 75.5° یا $75^\circ 30'$

4. 27.47° 5. 4924.04 میٹر 6. 3356.4 میٹر 7. 28.72 میٹر

8. 0.199 میل 9. 25.94 فٹ 10. 2928.2 فٹ

11. 164 میٹر ; 164 میٹر (یا 163.93) 12. 20.33 میٹر

متفرق مشق 7

Q.1. (i) (a) (ii) (d) (iii) (c) (iv) (b) (v) (c)
(vi) (b) (vii) (a) (viii) (b) (ix) (c) (x) (b)

Q.2. (iii) $10800'$ (v) 45° (vi) $\frac{\pi}{12}$ ریڈین (vii) 2 ریڈین (viii) 71.27 سم (x) $\frac{40}{9}$

Q.3. (i) 180° (ii) III (iii) IV
(iv) $\frac{1}{2}r^2\theta$ (v) 6 مربع سم
(vi) $2k\pi + 120^\circ$ جبکہ $k = 1$ (vii) $\theta = 30^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}$ ریڈین (viii) 2
(ix) $\operatorname{cosec}^2\theta$ (x) $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

یونٹ 8: مثلث کے ایک ضلع کا ظِل (سایہ)

مشق 8.1

1. 2.646 سم , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مربع سم 2. $m\overline{AC} = 2\sqrt{29}$ سم

مشق 8.2

1. $m\overline{BC} \approx 5.29$ سم 2. 5.45 سم

متفرق مشق 8

3.	$\simeq 4.58$ سم	4.	$\simeq 4.12$ سم	5.	15 سم
6.	6 سم	7.	90°	8.	$\simeq (61.9)^0$
9.	حادۃ الزاویہ	10.	قائمۃ الزاویہ		

یونٹ 9: دائرے کا وتر

مشق 9.1

3. 10 سم 4. $\simeq 14.97$ سم

مشق 9.2

3. 7 سم

متفرق مشق 9

1. (i) (*c*) (ii) (*a*) (iii) (*d*) (iv) (*c*) (v) (*a*)
(vi) (*b*) (vii) (*c*) (viii) (*b*) (ix) (*a*) (x) (*c*)
(xi) (*b*) (xii) (*b*) (xiii) (*d*) (xiv) (*c*)

یونٹ 10: دائرے کا مماس

مشق 10.2

2. 4 سم 3. $\simeq 16.96$ سم

متفرق مشق 10

1. (i) (*c*) (ii) (*a*) (iii) (*d*) (iv) (*b*) (v) (*d*)
(vi) (c) (vii) (*b*) (viii) (*d*) (ix) (*c*) (x) (*a*)
(xi) (*c*) (xii) (*b*) (xiii) (*b*)

یونٹ 11: وتر اور قوس

متفرق مشق 11

1. (i) (*d*) (ii) (*c*) (iii) (*b*) (iv) (*b*) (v) (*a*)
(vi) (*c*) (vii) (*b*) (viii) (*c*) (ix) (*a*) (x) (*b*)

یونٹ 12: قطعہ دائرے میں زاویہ

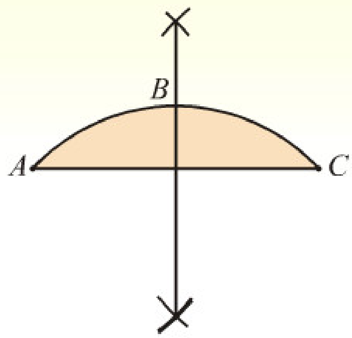
متفرق مشق 12

1. (i) (*c*) (ii) (*d*) (iii) (*a*) (iv) (*c*) (v) (*b*)
(vi) (*d*) (vii) (*d*) (viii) (*b*) (ix) (*d*) (x) (*c*)

مشق 13.1

1

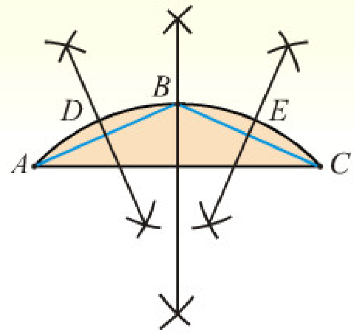
(i)



قوس AC کے دو برابر حصے

$\widehat{AB}, \widehat{BC}$

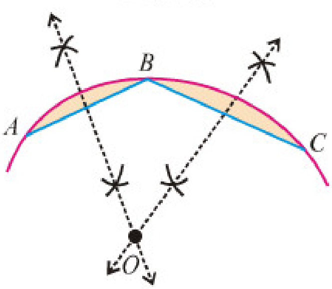
(ii)



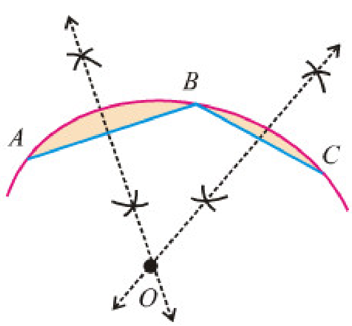
قوس AC کے چار برابر حصے

$\widehat{AD}$, $\widehat{DB}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{EC}$

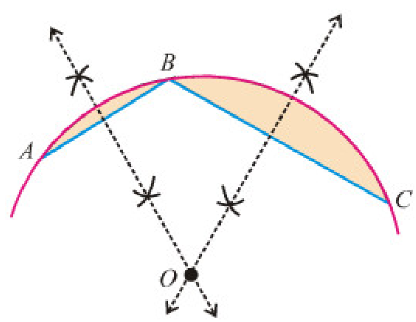
2



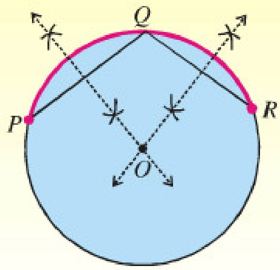
3(i)



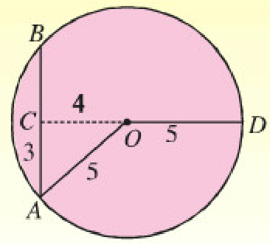
(ii)



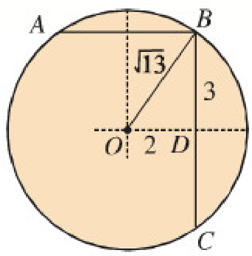
4



5.



6.



مشق 13.2

1. رداس = 3.3 سم　　2. 1 سم، تقریباً　　3. 2.3 سم

متفرق مشق 13

.1 کثیر الانتخابی سوالات۔

(i)	(*c*)	(ii)	(*b*)	(iii)	(*a*)	(iv)	(*a*)	(v)	(*b*)
(vi)	(*c*)	(vii)	(*a*)	(viii)	(*c*)	(ix)	(*a*)	(x)	(*c*)
(xi)	(*a*)	(xii)	(*a*)	(xiii)	(*b*)	(xiv)	(*b*)	(xv)	(*c*)
(xvi)	(*b*)	(xvii)	(*b*)	(xviii)	(*c*)				

2. (ii) 24 سم　　(iii) $\frac{360^{o}}{n}$　　(iv) 25 سم

.3 خالی جگہ پر کریں۔

(i)	محیط	(ii)	حد	(iii)	وتر	(iv)	مرکز
(vi)	منطبق	(vi)	کم	(vii)	بڑا	(viii)	ایک
(ix)	غیر خطی	(x)	قائمہ	(xi)	تماس، مرکز	(xii)	خطی
(xiii)	دو	(xiv)	عمود	(xv)	مماس	(xvi)	دو
(xvii)	مرکز	(xviii)	برابر	(xix)	برابر	(xx)	مساوی الاضلاع
(xxi)	ہم مرکز	(xxii)	محصور مرکز			(xxiii)	محاصر مرکز
(xxiv)	محصور رداس	(xxv)	محاصر رداس				

علامات اور مخففات
(Symbols and Abbreviations)

Adj. A	A کا ایڈ جائنٹ	$\because$	کیونکہ
A^t	A کا ٹرانسپوز	det A or $\|A\|$	A کا مقطع
A^{-1}	A کا معکوس	π	پائی
Add	جمع	$a \times 10^n$	سائنسی ترقیم
$\log_a x$	a اساس سے x کا لوگارتھم	pt	نقطہ
i	آئیوٹا جو $\sqrt{-1}$ کے برابر ہوتا ہے۔	w.r.t.	کے لحاظ سے
+ve	مثبت	−ve	منفی
$\in$	رکن ہے	$\notin$	رکن نہیں ہے
$\forall$	تمام کے لیے	$=$	برابر
$\exists$	وجود	$\neq$	برابر نہیں
Alt	متبادل	$\therefore$	اس لئے
Constr	عمل (بناوٹ)	i.e.	یعنی
Cor	نتیجہ صریح	$\Rightarrow$	امپلائز
Corresp	متناظرہ	$\circ$	ڈگری (درجہ)
Def	تعریف	/	منٹ یا فٹ
Ext	بیرونہ	//	سیکنڈ یا انچ
Fig	شکل	cm	سم
Iff	صرف اور صرف	$\approx / \simeq$	تقریباً
Iso	متماثل الساقین	$\cong$	متماثل
Mid pt.	درمیانی نقطہ	$\leftrightarrow$	مطابقت
perp	عمود	Δ^s	مثلثیں
prob.	سوال	$\geq$	بڑا یا برابر ہے۔

Quad.	چوکور	$\leq$	چھوٹا یا برابر ہے۔
Rect	مستطیل	$\underline{\lfloor rt}$	قائمہ زاویہ
Rhmb	معین	Δ	مثلث
Sq	مربع	$\perp$	عمود
st line	سیدھا خط	$\parallel$	متوازی
Th	مسئلہ	$\parallel gm$	متوازی الاضلاع
Trap	ذوزنقہ	$\odot$	دائرہ
vert opp.	راسی متقابل	O^{ce}	محیط
Q.E.D	فھو المطلوب	$\widehat{AB}$	قوس AB
θ	تھیٹا	$\overline{AB}$	قطعہ خط AB
ω	اومیگا	Φ	فائی

لوگرتھم کا جدول(Table of Logarithm)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4 4	9 8	13 12	17 16	21 20	26 24	30 28	34 32	38 36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 4	8 7	12 11	15 15	19 19	23 22	27 26	31 30	35 33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 3	7 7	11 10	14 14	18 17	21 20	25 24	28 27	32 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 3	7 7	10 10	13 13	16 16	20 19	23 22	26 25	30 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 3	6 6	9 9	12 12	15 15	19 17	22 20	25 23	28 26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 3	6 6	9 8	11 11	14 14	16 17	20 19	23 22	26 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 3	5 5	8 8	11 10	14 13	17 16	19 18	22 21	24 23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 2	5 5	8 7	10 10	13 12	15 15	18 17	20 20	23 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 2	5 5	7 7	9 9	12 11	14 14	16 16	19 18	21 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 2	4 4	7 6	9 8	11 11	13 13	16 15	18 17	20 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3785	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

(Table of Logarithms)لوگرتھم کا جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8738	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9603	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

(Table of Antiogarithm)اینٹی لوگرتھم کا جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1027	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	0	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1235	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

(Table of Antiogarithm)اینٹی لوگرتھم کا جدول

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

اصطلاحات

یونٹ 1

دودرجی مساوات: مساوات جو کہ متغیر مقدار کے مربع پر مشتمل ہو مگر دو سے کم یا زیادہ طاقت نہ رکھے، دودرجی مساوات یا دوسرے درجے کی مساوات کہلاتی ہے۔

دودرجی مساوات کی معیاری شکل x متغیر (variable) میں دوسرے درجے کی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$،

$a \neq 0$ اور a, b, c حقیقی اعداد ہوں۔ عام یا معیاری دودرجی مساوات کہلاتی ہے۔ جبکہ x^2 کا عددی سر a، x کا عددی سر b اور مستقل رقم c ہے۔

معکوس مساوات: کوئی مساوات معکوس مساوات کہلاتی ہے اگر یہ تبدیل نہ ہو جب x کو $\frac{1}{x}$ میں تبدیل کیا جائے۔

قوت نمائی مساوات: قوت نمائی (exponential) مساواتوں میں متغیر قوت نماؤں میں ہوتا ہے۔

جذری مساوات: مساوات جس میں جملہ (expression) جذری علامت کے نیچے ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

یونٹ 2

فرق کنندہ: دودرجی جملے $ax^2 + bx + c$ کا فرق کنندہ "$b^2 - 4ac$" ہوتا ہے۔

جذر المکعب: اکائی کے جذر المکعب $1, \omega$ اور ω^2 ہوتے ہیں۔

غیر حقیقی جذر المکعب: اکائی کے غیر حقیقی جذر المکعب ω اور ω^2 ہیں۔

اکائی کے جذر المکعب کی خصوصیات:

(a) اکائی کے جذر المکعب کا حاصل ضرب "1" کے برابر ہوتا ہے یعنی $1 . \omega . \omega^2 = \omega^3 = 1$

(b) اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کا معکوس ہوتا ہے۔

(c) اکائی کا ہر ایک غیر حقیقی جذر المکعب دوسرے کے مربع (Square) کے برابر ہوتا ہے۔

(d) اکائی کے تمام جذر المکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ یعنی $1 + \omega + \omega^2 = 0$

دودرجی مساوات کے روٹس: دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ کے روٹس (Roots)

$\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہیں۔

مجموعہ اور حاصل ضرب: دو درجی مساوات کے روٹس(Roots) کا مجموعہ اور حاصل ضرب بالترتیب

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ہوتے ہیں۔

سمیٹرک تفاعل: دو درجی مساوات کے روٹس پر مشتمل ایسے تفاعل جن میں روٹس ایسے ہوتے ہیں کہ روٹس کو بدلنے سے جملے کی قیمت تبدیل نہ ہو تو ایسے تفاعل کو سمیٹرک تفاعل کہتے ہیں۔

دو درجی مساوات بنانا:

$x^2 -$ (روٹس کا مجموعہ) $x +$ (روٹس کا حاصل ضرب) $= 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$$

ترکیبی تقسیم: جب کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ تو حاصل قسمت اور باقی معلوم کرنے کے طریقہ کو ترکیبی تقسیم کہتے ہیں۔

ہمزاد مساواتیں: دو متغیروں میں دو مساواتوں $f(x, y) = 0$ اور $g(x, y) = 0$ جن کا حل سیٹ مشترک ہو ہمزاد مساواتیں کہلاتی ہیں۔

یونٹ 3

نسبت: دو ہم قسم مقداروں کے درمیان تعلق نسبت کہلاتا ہے۔

تناسب: تناسب بیان کردہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر دو نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ برابر ہوں۔ تو ہم ان کو $a : b = c : d$ لکھ سکتے ہیں۔

تغیر راست: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے (کم ہونے) سے دوسری مقدار اسی نسبت سے بڑھے (کم) ہو تو ایسے تغیر کو تغیر راست کہتے ہیں۔

تغیر معکوس: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ جب ایک مقدار بڑھے اور دوسری اسی نسبت سے کم ہو تو ایسا تعلق تغیر معکوس کہلاتا ہے۔

تناسب کے مسئلے:

(1) مسئلہ عکس نسبت:

اگر $a : b = c : d$ ہو تو $b : a = d : c$

(2) مسئلہ ابدال نسبت:

اگر $a : b = c : d$ ہو تو $a : c = b : d$

(3) مسئلہ ترکیب نسبت:

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a + b : b = c + d : d$

اور (ii) $a : a + b = c : c + d$

(4) مسئلہ تفصیل نسبت:

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

(i) $a - b : b = c - d : d$

اور (ii) $a : a - b = c : c - d$

(5) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت:

اگر $a : b = c : d$ ہو تو

$a + b : a - b = c + d : c - d$

مشترک تغیر: ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات میں راست اور معکوس تغیروں کے ملنے سے مشترک تغیر بنتا ہے۔

K-طریقہ

(a) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ یا $a = bk$ اور $c = dk$

(b) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ ہو تو $a = bk$, $c = dk$ اور $c = fk$

یونٹ 4

کسر: کسر دو اعداد یا الجبری جملوں کی نسبت ہوتی ہے۔

ناطق کسر: $\frac{N(x)}{D(x)}$ قسم کی کسر جس میں $N(x)$ اور $D(x)$ حقیقی عددی سروں والی کثیر رقمیاں ہوں، ناطق کسر کہلاتی ہے۔
جب کہ کسر میں $D(x)$، صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ ہر کسری جملے کو دو کثیر رقمیوں کی نسبت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

واجب کسر: ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x) \neq 0$، واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ نسب نما میں کثیر رقمی $D(x)$ کے درجے سے کم ہو۔

غیر واجب کسر: ناطق کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ جبکہ $D(x) \neq 0$، غیر واجب کسر کہلاتی ہے اگر شمار کنندہ میں کثیر رقمی $N(x)$ کا درجہ نسب نما میں کثیر رقمی $D(x)$ کے درجے سے زیادہ ہو یا برابر ہو۔

جذری کسور: حاصل کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ کی تحلیل جب:

(a) نسب نما $D(x)$، غیر مکرر یک درجی اجزائے ضربی پر مشتمل ہو۔

(b) نسب نما $D(x)$، مکرر یک درجی جز و ضربی پر مشتمل ہو۔

(c) نسب نما $D(x)$، غیر مکرر، دو درجی جز و ضربی پر مشتمل ہو۔

(d) نسب نما $D(x)$، مکرر دو درجی جز و ضربی پر مشتمل ہو۔

یونٹ 5

سیٹ: کچھ مشترک خصوصیات کی حامل واضح اشیا کے مجموعہ کو سیٹ کہتے ہیں۔

سیٹوں کا یونین: دو سیٹوں A اور B کا یونین ایسے ارکان پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے جو A میں یا B میں یا دونوں میں ہوں۔ اس کو $A \cup B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

سیٹوں کا تقاطع: دو سیٹوں A اور B کا تقاطع دونوں سیٹوں کے مشترک ارکان پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے۔ اس کو $A \cap B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ علامتی طور پر اسے $A \cap B = \{x \mid x \in A$ اور $x \in B\}$ لکھتے ہیں۔

سیٹوں کا فرق: سیٹ B اور A کے فرق کو $A - B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس سیٹ میں B کے وہ ارکان ہوتے ہیں جو A میں نہیں ہوتے۔

کمپلیمنٹ سیٹ: U کے لحاظ سے سیٹ A کے کمپلیمنٹ سیٹ میں U کے وہ تمام ارکان ہوتے ہیں جو A میں نہیں ہوتے۔ اس کو $A^c = A' = U - A$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

بند اشکال: برطانوی ریاضی دان جان وین (1834-1923) نے یونیورسل سیٹ U کے لئے مستطیل کو پہلی دفعہ استعمال کیا اور اس کے تحتی سیٹوں A اور B کو اس کے اندر بند اشکال کے طور پر استعمال کیا۔

مترتب جوڑا: ایک مترتب جوڑے کے ارکان کو ایک خاص ترتیب سے لکھا جاتا ہے۔ جس میں ارکان کی ترتیب کی پابندی کی جاتی ہے۔ دو غیر خالی سیٹوں A اور B کی کارتیسی حاصلِ ضرب میں تمام مترتب جوڑے (x, y) ہوتے ہیں۔ جب کہ $x \in A, y \in B$ ہو تو اس سیٹ کو $A \times B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ثنائی ربط: اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہوں اور $R \subseteq A \times B$ تو تحتی سیٹ R، A سے B میں ثنائی ربط کہلاتا ہے۔

تفاعل: اگر دو غیر خالی سیٹ A اور B ہوں تو ربط $f : A \to B$ تفاعل کہلاتا ہے اگر

(i) $\text{Dom } f = A$

(ii) ہر x جو A میں ہو، f کے صرف ایک ہی مترتب جوڑے کا پہلا رکن ہوتا ہے۔

تفاعل کی ڈومین اور رینج: f کا ڈومین سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے پہلے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے اور f کا رینج سیٹ، f کے مترتب جوڑوں کے تمام دوسرے ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔

اِن ٹو تفاعل: ایک تفاعل '$f : A \to B$' اِن ٹو تفاعل کہلاتا ہے اگر B کا کم از کم ایک رکن سیٹ A کے کسی رکن کا عکس (امیج) نہ ہو۔ یعنی $\text{Range } f \subseteq B$

آن ٹو تفاعل: ایک تفاعل '$f : A \to B$' آن ٹو تفاعل کہلاتا ہے اگر سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کے کم از کم ایک رکن کا عکس ہو یعنی $\text{Range } f = B$

ون۔ون تفاعل: ایک تفاعل '$f : A \to B$' ون۔ون تفاعل کہلاتا ہے اگر سیٹ A کے تمام واضح ارکان کے واضح عکس سیٹ B میں ہوں۔

بائی جیکٹیو تفاعل: '$f : A \to B$' بائی جیکٹیو تفاعل کہلاتا ہے۔ اگر تفاعل f ون۔ون اور آن ٹو ہو۔

مستقل تفاعل: ایک تفاعل $f : A \to B$ مستقل تفاعل کہلاتا ہے۔اگر $\forall\ x \in A$ کے لیے سیٹ B میں ایک رکن c ہو۔اس طرح کہ $f(x) = c$

مماثل تفاعل: ایک تفاعل $f : A \to A$ مماثل تفاعل کہلاتا ہے۔اگر $\forall\ x \in A$ کے لیے $f(x) = x$

یونٹ 6

تعددی تقسیم: خام مواد کو منظم یک طرفہ جدول کی صورت میں پیش کرنے کو تعددی تقسیم کہتے ہیں۔

جماعتی حدود:

(a) ہر جماعت یا گروہ میں دو قیمتیں ہوتی ہیں۔ایک چھوٹی اور دوسری بڑی۔اس گروہ (جماعت) کی چھوٹی قیمت کو زیریں (نچلی) جماعتی حد اور بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد کہتے ہیں۔

(b) کسی جماعت (گروہ) میں حقیقی نچلی جماعتی حد اور حقیقی بالائی جماعتی حد کو حقیقی جماعتی حدود کہا جاتا ہے۔

(c) کسی جماعت کے درمیانی نقطہ کو جماعتی نشان کہا جاتا ہے۔یہ ہر کلاس کی زیریں اور بالائی جماعتی حد کو جمع کر کے 2 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(d) مجموعی تعدد کا کالم تعددی کالم سے مرتب کیا جاتا ہے کسی گروپ (کلاس) کی بالائی حد سے کم تمام گروپس کے تعدد کو مجموعی تعدد کہا جاتا ہے۔

کالمی نقشہ: کالمی نقشہ متصلہ مستطیلوں کا گراف ہوتا ہے جس کو XY- محور پر تشکیل دیا جاتا ہے۔

حسابی اوسط: حسابی اوسط وہ قیمت ہے جو تمام مدات کے مجموعہ کو مدات کی تعداد پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

انحراف: کسی متغیر مقدار سے مستقل مقدار کے فرق کو انحراف کہا جاتا ہے۔جیسے $D_i = x_i - A$

اقلیدسی اوسط: کسی متغیر x کی اقلیدسی اوسط سے مراد n-مدات $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ کے حاصل ضرب کا nth مثبت روٹ ہوتا ہے۔علامتی طور پر ہم اسے یوں لکھیں گے۔

$$\text{G.M} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^{1/n} \quad \text{(اقلیدسی اوسط)}$$

ہم آہنگ اوسط: ہم آہنگ اوسط وہ قیمت ہے جو $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ مدات کے معکوس کا حسابی اوسط لینے سے حاصل ہوتی ہے۔

عادہ: عادہ سے مراد وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں سب سے زیادہ بار آئے۔

$$\text{عادہ} = l + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$$

وسطانیہ: وسطانیہ ایک پیمانہ ہے جو کسی مواد کی درمیانی مد کا تعین کرتا ہے۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \frac{h}{f}\left\{\frac{n}{2} - c\right\}$$

انتشار: شماریات میں، انتشار سے مراد کسی مواد میں موجود مدات کا پھیلاؤ ہے۔

سعت: سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مد کے فرق کو سعت کہتے ہیں۔ اس کی پیمائش کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$\text{سعت} = X_{\max} - X_{\min} = X_m - X_0$$

تغیریت: تغیریت وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں، ان کے مجموعہ کو ان کی مدات x_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ کی تعدادات پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ علامتی طور پر اسے ہم اس طرح لکھتے ہیں۔

$$X \text{ کا معیاری انحراف} = \text{S.D}(X) = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \overline{X})^2}{n}}$$

یونٹ 7

ڈگری: اگر دائرے کے محیط کو 360 برابر قوسوں میں تقسیم کریں تو دائرے کے مرکز پر ایک قوس سے بننے والے زاویوں کو ایک ڈگری کہتے ہیں اور اس کو 1° سے ظاہر کرتے ہیں۔

ریڈین: ایک قوس جس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہو، اس سے دائرے کے مرکز پر بننے والے زاویے کی مقدار ایک ریڈین کہلاتی ہے۔

ریڈین اور ڈگری کے درمیان تعلق:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین} \approx 0.0175 \text{ ریڈین} \quad \text{اور} \quad 1 \text{ ریڈین} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295^\circ \approx 57.295^\circ$$

دائرے کے مرکزی زاویہ، قوس اور رداس میں تعلق: مرکزی زاویہ θ اور دائرے کی قوس کی لمبائی l میں تعلق $l = r\theta$ ہوتا ہے۔

دائروی قطاع کا رقبہ: دائروی قطاع کا رقبہ A، $\frac{1}{2}r^2\theta$ کے برابر ہوتا ہے۔ یعنی $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

کوٹرمینل زاویے: دو یا دو سے زیادہ زاویے جن کے ابتدائی بازو اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں، کوٹرمینل زاویے کہلاتے ہیں۔

ربع زاویہ: اگر کسی زاویے کا اختتامی بازو x - محور یا y- محور پر ہو تو اس زاویے کو ربع زاویہ کہتے ہیں۔

زاویہ کی معیاری صورت: اگر عمومی زاویے کا راس (Vertex)، مبداء (Origin) پر ہو اور ابتدائی بازو مستوی میں x- محور کی مثبت سمت میں ہو ایسا زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے۔

تکونیاتی نسبتیں: بنیادی طور پر تکونیاتی نسبتیں چھ ہیں۔ جن کو Sine، Cosine، Tangent، Cotangent، Secant اور Cosecant کہتے ہیں۔

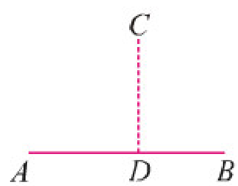
تکونیاتی مماثلات:

(a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (b) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

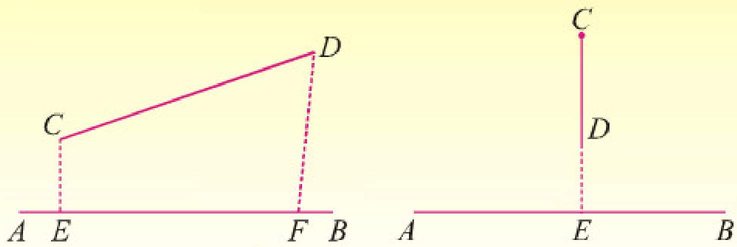
(c) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

یونٹ 8

ظِل: کسی نقطہ سے ایک دیے ہوئے قطعہ خط پر عمود کھینچا جائے تو پایۂ عمود کو نقطے کا ظِل یا سایہ کہتے ہیں۔ اگر $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ کھینچا جائے تو پایۂ عمود D کو نقطہ C کا ظِل کہیں گے۔



صفری سمت: دیے ہوئے قطعہ خط $\overline{CD}$ کا کسی دوسرے قطعہ خط $\overline{AB}$ پر ظل سے مراد $\overline{EF}$ ہے جو نقطہ E پایۂ عمود C اور نقطہ F پایۂ عمود D کے درمیان ہوتا ہے، البتہ دے ہوئے عمودی قطعہ خط $\overline{CD}$ کا کسی دوسرے قطعہ خط $\overline{AB}$ پر ایک نقطہ E ہوتا ہے جس کی پیمائش صفر ہوتی ہے۔



منفرجہ زاویہ: کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے اور دو چند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔

قائمہ زاویہ: ایک زاویہ جو 90^{o} کے برابر ہو قائمہ زاویہ کہلاتا ہے۔

حادہ زاویہ: کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے متقابل ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے سے کم دو چند مستطیلی رقبہ جو ان دو اضلاع میں سے ایک اور اس پر دوسرے کے ظِل سے بنتا ہے، کے برابر ہوتا ہے۔

یونٹ 9

دائرہ: ان تمام مستوی کے نقاط کا گراف جن کا فاصلہ مستوی کے ایک مخصوص نقطہ سے برابر ہو دائرہ کہلاتا ہے۔ مخصوص نقطہ دائرے کا مرکز اور مخصوص نقطہ سے دائرے کے کسی نقطہ کا فاصلہ رداس کہلاتا ہے۔

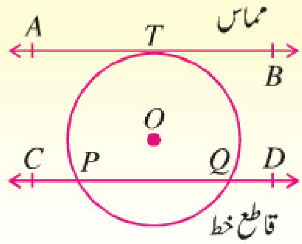
دائرے کا محیط: دائرے کا رداس r ہو تو اِسکا محیط $2\pi r$ ہوتا ہے۔

دائرے کا رقبہ: دائرے کا رداس r ہو تو اِسکا رقبہ πr^2 ہوتا ہے۔

ہم خط نقاط: تین یا تین سے زیادہ نقاط ایک ہی خطِ مستقیم پر وَاقع ہوں تو انہیں ہم خط نقاط کہتے ہیں بصورت دیگر وہ غیر ہم خط نقاط ہوں گے۔

محاصر دائرہ: مثلث کے راسوں سے گزرنے والا دائرہ محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔ جبکہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف اِس کے مرکز کی نشاندہی کرتے ہیں۔

یونٹ 10



قاطع خط: قاطع خط ایک ایسا خط مستقیم ہے جو دائرے کے محیط کو دو واضح نقاط پر قطع کرتا ہے۔ شکل میں قاطع $\overleftrightarrow{CD}$ دائرہ کو دو واضح نقاط P اور Q قطع کرتا ہے۔

مماس: دائرے کا مماس ایک ایسا خط ہے جو دائرے کے محیط کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہے۔ شکل میں دائرے کے نقطہ T پر $\overleftrightarrow{AB}$ مماس ہے۔

مماس کی لمبائی: مماس کی لمبائی دائرے کے کسی بیرونی نقطہ سے نقطہ تماس تک ہوتی ہے۔

یونٹ 12

سیکٹر/قطاع دائرہ: دائرے کے دو رداسی قطعات اور ان کی درمیانی قوس سے گھرا ہوا علاقہ دائرے کا سیکٹر کہلاتا ہے۔

مرکزی زاویہ: مرکزی زاویہ دائرے کے مرکز پر دو راسوں اور ایک قوس سے بنتا ہے۔

محاصر زاویہ: دائرے کے کوئی سے دو وتر جو محیط پر مشترک نقطہ پر ملیں ان سے بننے والا زاویہ محاصر زاویہ کہلاتا ہے۔

دائرے کا وتر: محیط کے کوئی سے دو نقاط کو ملانے والا قطعہ خط دائرے کا وتر کہلاتا ہے۔

سائیکلک چوکور: وہ چوکور، سائیکلک کہلاتی ہے جس کے چاروں راسوں سے دائرہ کھینچا جاسکتا ہو۔

محصور مرکز: مثلث کے محصور دائرہ کے مرکز کو محصور مرکز کہتے ہیں۔

یونٹ 13

دائرہ: کسی رداس کا دائرہ، پرکار کو کسی معین نقطے پر گھمانے سے ٹریس (Trace) کیا جاسکتا ہے۔ معین نقطہ کو دائرے کا مرکز کہتے ہیں۔

رداس: دائرے کے مرکز سے محیط کے کسی نقطہ تک کا فاصلہ رداس کہلاتا ہے۔

احاطہ: جیومیٹری کی کسی شکل کے تمام اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ احاطہ کہلاتا ہے۔

محیط: دائرے کی قوس کی کل لمبائی کو محیط کہتے ہیں۔

قطر: دائرے کے مرکز سے گزرنے والا وتر اس کا قطر کہلاتا ہے۔

قوس: دائرے کے محیط کا ایک حصہ قوس کہلاتا ہے۔

مثلث: تین غیر متوازی قطعات خط سے بننے والی شکل کو مثلث کہتے ہیں اور قطعات خط اس کے اضلاع کہلاتے ہیں۔

کثیر الاضلاع: تین یا تین سے زیادہ قطعات خط سے گھری ہوئی شکل کو کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔

ریگولر کثیر الاضلاع: ایسی کثیر الاضلاع جس کے تمام اضلاع اور زاویے برابر ہوں۔ ریگولر کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔

راس: کثیر الاضلاع کے کسی دو ضلعوں کے مشترک نقطہ کو راس کہتے ہیں۔

محاصر دائرہ: دائرہ جو کسی کثیر الاضلاع تمام راسوں سے گزرتا ہو محاصر دائرہ کہلاتا ہے اور دائرے کے اندر کثیر الاضلاع محصور کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔

جانبی دائرہ: دائرہ جو کسی مثلث کے ایک ضلع کو بیرونی اور باقی دو بڑھے ہوئے اضلاع کو اندرونی طور پر مَس کرے۔ جانبی دائرہ کہلاتا ہے۔

محاصر دائرہ: مثلث کے راسوں سے گزرنے والا دائرہ، محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔

محصور دائرہ: مثلث کے تینوں اضلاع کو اندرونی طور پر مَس کرنے والا دائرہ، محصور دائرہ کہلاتا ہے۔ اس کے مرکز کو محصور مرکز اور رداس کو محصور رداس کہتے ہیں۔

انڈیکس

ا، ب

پ، ت

ٹ، ث

ج، چ

ع، غ

ف، ق، ک، گ

م

حوالہ جات

1. Oxford Mathematics *by Teh Kong Seng, Loh Chengyez,*
   Published by: Ameena Saiyed Oxford University Press Karachi.

2. Oxford Additional Mathematics *by Ho Soo Thong, Khor Nyak Hiony,*
   Published by: Pan Pacific Publishing Singapore.

3. National Curriculum Level 9 & 10 *by K.M. Vickers and M.J. Tipler,*
   Published by: Canterbury Educational Ltd. Great Britain.

4. Fundamental Algebra and Trigonometry *by Robert G. Stein,*
   Published by: Nelson-Hall Chicago (USA).

5. A New Sequence of Geometry for School *by Johan Gray,*
   Published by: Great Educational Co. Ltd. London.

6. Dil's New Geometry *by Khawaja Dil Muhammad,*
   Published by: Khawaja Book Depot, Lahore.

7. Discovering Algebra *by Russell F. Jacobs,*
   Published by: Harcourt Brace Jovanovich, New York (USA).

8. Elementary Geometry *by C. Godfrey & A.W. Siddons,*
   Published by: Cambridge University Press.

9. Complete Mathematics *by Indian Edition 2009*
   Published in: New Dehli India.

10. Pak Geometry *by M. Hassan Rathoor and Dr. Zia-ud-din.*